

Lebesgue 测度论

目录

第一部分 \mathbb{R}^n 的拓扑	2
1 度量空间, n 维 Euclid 空间	2
2 内点, 界点, 聚点	4
3 开集、闭集、紧集、完备集	6
4 Cantor 三分集	10
第二部分 Lebesgue 测度论	12
5 Lebesgue 外测度	13
6 Lebesgue 可测集	15
7 可测集类	21

第一部分 \mathbb{R}^n 的拓扑

1 度量空间, n 维 Euclid 空间

把多个元素放在一起就构成了集合, 但是集合间的元素是松散的. 我们还需要定义集合的元素之间的“关系”或“结构”, 有了这层“关系”或“结构”, 就构成了一个空间.

定义 1 (度量空间). 设 X 是一个集合, 若对于 X 中任意两个元素 x, y , 都有唯一确定的实数 $d(x, y)$ 与之对应, 而且这一对应关系满足下列条件:

1. $d(x, y) \geq 0$, 当且仅当 $x = y$ 时等号成立;
2. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$, 对任意 z 都成立,

则称 $d(x, y)$ 是 x, y 之间的距离, 称 (X, d) 为度量空间或距离空间. X 中的元素称为点, 条件 (2) 称为三点不等式.

注. 距离 d 有对称性, 即 $d(x, y) = d(y, x)$. 事实上, 在三点不等式中取 $z = x$, 则

$$d(x, y) \leq d(x, x) + d(y, x) = d(y, x).$$

由于 x, y 的次序是任意的, 同理可证 $d(y, x) \leq d(x, y)$, 这就得到 $d(x, y) = d(y, x)$.

注. 如果 (X, d) 是度量空间, Y 是 X 的一个非空子集, 则 (Y, d) 也是一个度量空间, 称为 X 的子空间.

定义 2 (n 维 Euclid 空间). 设 n 是一个正整数, 将由 n 个实数 x_1, x_2, \dots, x_n 按确定的次序排成的数组 (x_1, x_2, \dots, x_n) 的全体组成的集合记为 \mathbb{R}^n , 对 \mathbb{R}^n 中任意两点

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n),$$

规定距离

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i)^2}.$$

容易验证 $d(x, y)$ 满足距离的条件. 将 (\mathbb{R}^n, d) 称为 n 维 Euclid 空间, 其中 d 称为 Euclid 距离.

注. 对 $d(x, y)$ 满足距离的条件的验证: 首先, 条件 (1) 显然成立, 对于条件 (2), 由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i^2 \\ &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2.\end{aligned}$$

令 $z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$, $a_i = \zeta_i - \xi_i$, $b_i = \eta_i - \zeta_i$, 则

$$\eta_i - \xi_i = a_i + b_i.$$

代入上面不等式即为三点不等式.

此外, 在 \mathbb{R}^n 中还可以用下面的方法定义其他的距离:

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|.$$

容易验证 ρ 也满足条件 (1) 和条件 (2). (称 ρ 为 Manhattan 距离) 由此可知, 在一个集合中引入距离的方法可以不限于一种. 之后我们仅讨论 n 维 Euclid 空间和 Euclid 距离 $d(x, y)$.

下面我们将考察 \mathbb{R}^n 中的极限、开集、闭集、紧集等一系列概念, 它们的基础都是邻域, 而邻域仅依靠距离即可作出. 本章的结论对于一般的度量空间也是成立的, 之后在泛函分析的学习中还会涉及.

我们从定义邻域的概念开始.

定义 3 (邻域). \mathbb{R}^n 中所有和定点 P_0 的距离小于定数 $\delta (> 0)$ 的点的全体, 即集合

$$\{P | d(P, P_0) < \delta\}$$

称为点 P_0 的 δ 邻域, 记作 $U(P_0, \delta)$. P_0 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径. 在不需要特别指出是怎样的一个半径时, 也干脆说是 P_0 的一个邻域, 记作 $U(P_0)$. 显然, 在 \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 中的 $U(P_0, \delta)$ 就是以 P_0 为中心, δ 为半径的开区间, 开圆和开球.

容易证明邻域具有下面的基本性质:

性质 1. 1. $P \in U(P)$;

2. 对于 $U_1(P)$ 和 $U_2(P)$, 存在 $U_3(P) \subset U_1(P) \cap U_2(P)$;

3. 对于 $Q \in U(P)$, 存在 $U(Q) \subset U(P)$;

4. 对于 $P \neq Q$, 存在 $U(P)$ 和 $U(Q)$, 使 $U(P) \cap U(Q) = \emptyset$.

定义 4 (极限). 设 $\{P_n\}$ 为 \mathbb{R}^m 中一点列, $P_0 \in \mathbb{R}^m$, 如果当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $d(P_n, P_0) \rightarrow 0$, 则称点列 $\{P_n\}$ 收敛于 P_0 . 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$ 或 $P_n \rightarrow P_0 (n \rightarrow \infty)$.

注. 用邻域的术语来定义 $\{P_n\}$ 收敛于 P_0 : 对于 P_0 的任一邻域 $U(P_0)$, 存在某个自然数 N , 对任意 $n > N$, 都有 $P_n \in U(P_0)$.

定义 5 (点集的距离). 两个非空点集 A, B 的距离定义为

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) | x \in A, y \in B\}.$$

注. 特别地, 当其中一个点集为单点集时, 我们就定义了点与点集的距离.

定义 6 (点集的直径). 一个非空点集 E 的直径定义为

$$\delta(E) = \sup_{P, Q \in E} d(P, Q).$$

定义 7 (有界点集). 设 E 是 \mathbb{R}^n 中一点集, 若 $\delta(E) < \infty$, 则称 E 为有界点集.

注. 空集也作为有界点集.

注. 显然, E 为有界点集的充要条件是存在常数 $K > 0$, 使对于所有的 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$, 都有 $|x_i| \leq K (i = 1, 2, \dots, n)$. 这等价于: 存在 $K > 0$, 对所有 $x \in E$, 都有 $d(x, \mathbf{0}) \leq K$, 这里 $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$, 称为 n 维 Euclid 空间的原点.

定义 8. 点集 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) | a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 称为一个开区间 (n 维), 若将其不等式一律换成 $a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则称之为一个闭区间. 类似地, 我们还可以定义左开右闭区间、左闭右开区间. 当上述各种区间无区别的必要时, 统称为区间, 记作 I . 把 $b_i - a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 称为 I 的第 i 个“边长”, $\prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ 称为 I 的“体积”, 记为 $|I|$.

2 内点, 界点, 聚点

定义 9 (内点, 外点, 界点). 如果存在 P_0 的某一邻域 $U(P_0)$, 使 $U(P_0) \subset E$, 则称 P_0 为 E 的内点. 如果 P_0 是 E^c 的内点, 则称 P_0 是 E 的外点. 如果 P_0 既非 E 的内点又非 E 的外点, 也就是说 P_0 的任一邻域既有属于 E 的点, 又有不属于 E 的点, 则称 P_0 为 E 的界点或边界点.

注. 上述三个概念中当然以内点最为重要, 因为其他两个概念都是由此派生出来的.

定义 10 (聚点). 设 E 是 \mathbb{R}^n 中一点集, P_0 为 \mathbb{R}^n 中一定点, 如果 P_0 的任一邻域内都含有无穷多个属于 E 的点, 则称 P_0 为 E 的一个聚点.

注. 由聚点定义可知有限集没有聚点.

定理 1. 下面三个陈述是等价的:

1. P_0 是 E 的聚点;
2. 在 P_0 的任一邻域内, 至少含有一个属于 E 而异于 P_0 的点;
3. 存在 E 中互异的点所成点列 $\{P_n\}$, 使 $P_n \rightarrow P_0 (n \rightarrow \infty)$.

显然 E 的内点一定是 E 的聚点, 但 E 的聚点不一定是 E 的内点, 还可能是 E 的界点. 其次, E 的内点一定属于 E , 但 E 的聚点可以属于 E 也可以不属于 E .

定义 11 (孤立点). 设 E 是 \mathbb{R}^n 中一点集, P_0 为 \mathbb{R}^n 中一定点, 如果 P_0 属于 E 但不是 E 的聚点, 则 P_0 称为 E 的**孤立点**.

注. 由定理 1 可知, P_0 是 E 的孤立点的充要条件是: 存在 P_0 的某邻域 $U(P_0)$, 使得 $E \cap U(P_0) = \{P_0\}$. 由此又知, E 的界点不是聚点就是孤立点.

综上所述, 所有 \mathbb{R}^n 中的点, 对 E 来说可以分为内点、界点、外点或分为聚点、孤立点、外点. 但是, 对一个具体的点集 E 来说, 以上两种分类的三种点不一定都出现. 界点和聚点可以属于 E , 也可以不属于 E .

根据上面引入的概念, 对于一个给定的点集 E , 我们可以考虑上述各种点的集合, 其中最重要的是下面四种.

定义 12. 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的一个点集, 有

1. E 的全体内点所成的集合, 称为 E 的**开核**, 记作 \mathring{E} .
2. E 的全体聚点所成的集合, 称为 E 的**导集**, 记作 E' .
3. E 的全体界点所成的集合, 称为 E 的**边界**, 记作 ∂E .
4. $E \cup E'$ 称为 E 的**闭包**, 记作 \bar{E} .

它们都可以用集合的语言描述如下.

1. $\mathring{E} = \{x | \exists U(x) \subset E\};$
2. $E' = \{x | \forall U(x), U(x) \cap E \setminus \{x\} \neq \emptyset\};$
3. $\partial E = \{x | U(x) \cap E \neq \emptyset \text{ 且 } U(x) \cap E^c \neq \emptyset\};$
4. $\bar{E} = \{x | \forall U(x), U(x) \cap E \neq \emptyset\}.$

注. 由 (4) 可以看出, 闭包就是包含 E 的内点、界点、聚点、孤立点 (可能会有重合) 而只不含 E 的外点的集合.

注. 由 (4) 还可得到

$$\overline{E} = E \cup \partial E = \overset{\circ}{E} \cup \partial E = E' \cup \{E \text{ 的孤立点}\}$$

以及闭包与内核的对偶关系

$$(\overset{\circ}{E})^c = \overline{E^c}, \quad (\overline{E})^c = \overset{\circ}{E^c}.$$

定理 2. 设 $A \subset B$, 则 $A' \subset B'$, $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$, $\overline{A} \subset \overline{B}$.

定理 3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

证明. 因为 $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$, 故从定理 2 可知, $A' \subset (A \cup B)'$, $B' \subset (A \cup B)'$, 从而

$$A' \cup B' \subset (A \cup B)'.$$

另一方面, 假设 $P \in (A \cup B)'$, 则必有 $P \in A' \cup B'$. 即 $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$. 否则, 若 $P \notin A' \cup B'$, 那么将有 $P \notin A'$ 且 $P \notin B'$. 因而有 P 的某一邻域 $U_1(P)$, 在 $U_1(P)$ 内除 P 外不含 A 的任何点, 同时有 P 的某一邻域 $U_2(P)$, 在 $U_2(P)$ 内除 P 外不含 B 的任何点, 则由邻域的基本性质 (2) 知, 存在 $U_3(P) \subset U_1(P) \cap U_2(P)$, 在 $U_3(P)$ 中除点 P 外不含 $A \cup B$ 中的任何点, 这与 $P \in (A \cup B)'$ 的假设矛盾. \square

定理 4 (Bolzano-Weierstrass 定理). 有界无限点集至少有一个聚点.

证明方法同数学分析中 \mathbb{R} 和 \mathbb{R}^2 时的证明, 在此不再赘述.

定理 5. 设 $E \neq \emptyset$, $E \neq \mathbb{R}^n$, 则 E 至少有一界点 (即 $\partial E \neq \emptyset$).

证明. 设 $P_0 \in E$, $P_1 \in E^c$, 定义 $P_t = (1-t)P_0 + tP_1$, $t \in [0, 1]$. 设 $t_0 = \sup\{t | P_t \in E\}$. 下证 $P_{t_0} \in \partial E$.

若 $P_{t_0} \in E$, 则 $t_0 \neq 1$. 对任意 $t \in (t_0, 1]$, $P_t \notin E$. 对任意 $\delta > 0$, 存在 $t \in (t_0, 1]$, 使得 $P_t \in E^c \cap U(P_{t_0}, \delta)$, 于是 $P_{t_0} \in \partial E$.

若 $P_{t_0} \in E^c$, 即 $P_{t_0} \notin E$, 则 $t_0 \neq 0$. 存在 $t_n \in [0, t_0)$, $t_n \rightarrow t_0$, 且 $P_{t_n} \in E$. 对任意 $\delta > 0$, 存在 $P_{t_n} \in E \cap U(P_{t_0}, \delta)$. 因 $P_{t_0} \in U(P_{t_0}, \delta) \cap E^c$, 于是也有 $P_{t_0} \in \partial E$. \square

3 开集、闭集、紧集、完备集

定义 13 (开集). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 如果 E 的每一点都是 E 的内点, 则称 E 为开集.

例如整个空间 \mathbb{R}^n 是开集, 空集是开集, 在 \mathbb{R} 中任意开区间 (a, b) 是开集, 在 \mathbb{R}^2 中 $E = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 是开集 (但它在 \mathbb{R}^3 中就不是开集了, 想想看, 这是为什么?).

定义 14 (闭集). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 如果 E 的每一个聚点都属于 E , 则称 E 为闭集.

例如整个空间 \mathbb{R}^n 是闭集, 空集是闭集, 在 \mathbb{R} 中任意闭区间 $[a, b]$ 是闭集, 任意的有限集合都是闭集.

开集、闭集利用开核、闭包等术语来说, 就是

$$E \text{ 为开集} \iff E \subset \mathring{E}, \text{ 即 } E = \mathring{E}.$$

$$E \text{ 为闭集} \iff E' \subset E (\text{或 } \partial E \subset E).$$

今后开集常用字母 G 表示, 闭集常用字母 F 表示.

定理 6. 对任何 $E \subset \mathbb{R}^n$, \mathring{E} 是开集, E' 和 \overline{E} 都是闭集. (这也是 \mathring{E} 称为开核, \overline{E} 称为闭包的缘由)

证明. 首先证明 \mathring{E} 是开集. 设 $P \in \mathring{E}$, 由 E 的定义知, 存在邻域 $U(P) \subset E$, 对于任意的 $Q \in U(P)$, 由邻域的基本性质 (3) 知, 存在 $U(Q)$ 使得 $U(Q) \subset U(P) \subset E$, 即 Q 是 E 的内点, 故 $U(P) \subset \mathring{E}$, 所以 P 是 \mathring{E} 的内点, 故 \mathring{E} 是开集.

其次证明 E' 是闭集. 设 $P_0 \in (E')'$, 则由定理 1(2) 可知, 在 P_0 的任一邻域 $U(P_0)$ 内, 至少含有一个属于 E' 而异于 P_0 的点 P_1 . 因为 $P_1 \in E'$, 于是又有属于 E 的 $P_2 \in U(P_0)$, 而且还可以要求 $P_2 \neq P_0$, 再次利用该定理, 即得 $P_0 \in E'$. 所以 E' 是闭集.

最后证明 \overline{E} 是闭集. 由闭包的定义及定理 3, 有

$$(\overline{E})' = E' \cup (E')' \subset E' \cup E' = E' \subset \overline{E}.$$

从而 \overline{E} 是闭集. □

定理 7 (开集与闭集的对偶性). 设 E 是开集, 则 E^c 是闭集; 设 E 是闭集, 则 E^c 是开集.

证明. 只需证明第一部分.

证法一: 设 E 是开集, 而 P_0 是 E^c 的任一聚点, 那么, P_0 的任一邻域都有不属于 E 的点. 这样 P_0 就不可能是 E 的内点, 从而不属于 E (因为 E 是开集), 也就是 $P_0 \in E^c$. 由闭集的定义得 E^c 为闭集.

证法二: 设 E 是开集, 则 $E = \mathring{E}$, 由闭包、开核、对偶关系, 得 $\overline{E^c} = (\mathring{E})^c = E^c$, 可见 E^c 是闭集. □

由于开集和并集的这种对偶关系, 在许多情形下, 我们将闭集看作是开集派生出来的概念. 也就是说, 如果定义了开集, 闭集也就随之确定.

定理 8. 任意多个开集的并仍是开集, 有限多个开集的交仍是开集.

证明. 第一部分显然. 对第二部分, 有限多个开集的交仍是开集总能递归为两个开集的交仍是开集. 故只需证明两个开集的交的情况.

设 G_1, G_2 为开集, 任取 $P_0 \in G_1 \cap G_2$. 因 $P_0 \in G_i (i = 1, 2)$, 故存在 $U_i(P_0) \subset G_i (i = 1, 2)$. 由邻域的基本性质 (2), 存在 $U_3(P_0) \subset U_1(P_0) \cap U_2(P_0)$, 从而 $U_3(P_0) \subset G_1 \cap G_2$, 可见 P_0 是 $G_1 \cap G_2$ 的内点. □

注. 任意多个开集的交不一定是开集. 例如

$$G_n = \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

每个 G_n 是开集, 但 $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = [-1, 1]$ 不是开集.

定理 9. 任意多个闭集的交仍为闭集, 有限多个闭集的并仍为闭集.

证明. 利用 De Morgan 公式.

设 $\Lambda = \{1, 2, \dots\}$, $F_i, i \in \Lambda$ (或 $i = 1, 2, \dots, m$) 是闭集, 则由开集和并集的对偶关系知 F_i^c 是开集, 从而由定理 8 知, $\bigcup_{i \in \Lambda} F_i^c$ (或 $\bigcup_{i=1}^m F_i^c$) 也是开集, 由 De Morgan 公式有

$$\bigcap_{i \in \Lambda} F_i = \left(\bigcup_{i \in \Lambda} F_i^c\right)^c \quad \text{或} \quad \bigcup_{i=1}^m F_i = \left(\bigcap_{i=1}^m F_i^c\right)^c,$$

故再由开集和并集的对偶关系可知 $\bigcap_{i \in \Lambda} F_i$ 或 $\bigcup_{i=1}^m F_i$ 是闭集. □

注. 任意多个闭集的并不一定是闭集. 例如

$$F_n = \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right], \quad n = 3, 4, \dots,$$

每个 F_n 是闭集, 但 $\bigcup_{n=3}^{\infty} F_n = (0, 1)$ 不是闭集.

性质 2. 设 F_1, F_2 是 \mathbb{R} 中两个互不相交的闭集, 则存在两个互不相交的开集 G_1, G_2 , 使 $G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$.

在数学分析中我们已经学习了以下形式的 Heine-Borel 有限覆盖定理: 设 I 是 \mathbb{R}^n 中的闭区间, \mathcal{M} 是一族开区间, 它覆盖了 I , 则在 \mathcal{M} 中一定存在有限多个开区间, 它们同样覆盖了 I .

我们下面要把上述定理推广成更一般的形式.

定理 10 (Heine-Borel 定理). 设 F 是一个有界闭集, \mathcal{M} 是一族开集, 它覆盖了 F , 则在 \mathcal{M} 中一定存在有限多个开集, 它们同样覆盖了 F .

证明. 因 F 是有界闭集, 所以在 \mathbb{R}^n 中存在闭区间 I 包含 F . 记 \mathcal{D} 为由 \mathcal{M} 中的全体开集与开集 F^c 一起组成的新开集族, 则 \mathcal{D} 覆盖了 \mathbb{R}^n , 因此也覆盖了 I . 对于 I 中任一点 P , 存在 \mathcal{D} 中开集 U_P , 使得 $P \in U_P$, 因而存在开区间 $I_P \subset U_P$, 并且 $P \in I_P$, 所以开区间族 $\{I_P | P \in I\}$ 覆盖了 I . 由数学分析中的有限覆盖定理, 在这族开区间中存在有限个开区间, 设为 $I_{P_1}, I_{P_2}, \dots, I_{P_m}$ 仍然覆盖了 I , 则由 $F \subset I$, 及 $I_{P_i} \subset U_{P_i} (i = 1, 2, \dots, m)$, 得 $F \subset \bigcup_{i=1}^m U_{P_i}$. 如果开集 F^c 不在这 m 个开集中, 则 $U_{P_1}, U_{P_2}, \dots, U_{P_m}$ 覆盖了 F , 定理得证; 否则从这 m 个开集中去掉 F^c , 因为 F^c 与 F 不相交, 所以剩下的 $m-1$ 个开集仍然覆盖了 F . □

定义 15 (紧集). 设 M 是度量空间 X 中一集合, \mathcal{M} 是 X 中任一族覆盖了 M 的开集, 如果必可从 \mathcal{M} 中选出有限个开集仍然覆盖 M , 则称 M 为 X 中的紧集.

由 Heine-Borel 定理知 \mathbb{R}^n 中的有界闭集必为紧集, 是否 \mathbb{R}^n 中的紧集都是有界闭集呢? 答案是肯定的, 我们有以下定理.

定理 11. 设 M 是 \mathbb{R}^n 中的紧集, 则 M 是 \mathbb{R}^n 中的有界闭集.

证明. 设点 $Q \in M^c$, 对于 M 中的任意一点 P , 由于 $P \neq Q$, 由邻域性质, 存在 $\delta_P > 0$, 使得

$$U(P, \delta_P) \cap U(Q, \delta_P) = \emptyset.$$

显然开集族 $\{U(P, \delta_P) | P \in M\}$ 覆盖了 M , 由于 M 是紧集, 因此存在有限个邻域 $U(P_i, \delta_{P_i}) (i = 1, 2, \dots, m)$, 使得

$$M \subset \bigcup_{i=1}^m U(P_i, \delta_{P_i}) \quad (1)$$

由此立即可知 M 是有界集. 又令

$$\delta = \min\{\delta_{P_1}, \delta_{P_2}, \dots, \delta_{P_m}\},$$

则 $\delta > 0$, 并且 $U(Q, \delta) \cap U(P_i, \delta_i) = \emptyset (i = 1, 2, \dots, m)$, 由(1)式得 $U(Q, \delta) \cap M = \emptyset$, 因此 Q 不是 M 的聚点, 所以 $M' \cap M^c = \emptyset$, 这说明 $M' \subset M$, 即 M 是闭集. \square

注. 上述定理说明了 \mathbb{R}^n 中紧集和有界闭集是一致的. 但是在一般的度量空间中, 紧集一定是有界闭集 (与上述定理证明相类似), 但有界闭集不一定是紧集.

定义 16 (自密集). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 如果 $E \subset E'$, 就称 E 是自密集.

注. 换句话说, 当集合中每点都是这个集的聚点时, 这个集是自密集. 另一个说法是没有孤立点的集是自密集.

例如, 空集是自密集, \mathbb{R} 中有理数全体组成的集是自密集.

定义 17 (完备集). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 如果 $E = E'$, 就称 E 是完备集或完全集.

可以看出, 完备集就是自密闭集, 即没有孤立点的闭集. 例如, 空集是完备集, \mathbb{R} 中任一闭区间 $[a, b]$ 及全直线都是完备集.

下面我们简单介绍直线上 (即 \mathbb{R} 中) 开集与闭集的构造.

在直线上, 开区间是开集, 但是开集不一定是开区间, 它往往是一系列开区间的并集. 为研究直线上开集的结构, 我们先引入构成区间的概念.

定义 18 (构成区间). 设 G 是直线上的开集, 如果开区间 $(\alpha, \beta) \subset G$, 而且端点 $\alpha, \beta \notin G$, 那么称 (α, β) 为 G 的**构成区间**.

定理 12 (开集构造定理). 直线上任一个**非空开集**可以表示成**至多可数个互不相交的构成区间**的并.

证明. □

既然闭集的余集是开集, 那么从开集的构造可以引入余区间的概念.

定义 19 (余区间). 设 A 是直线上的闭集, 称 A 的余集 A^c 的构成区间为 A 的**余区间**或**邻接区间**.

我们得到闭集的构造如下:

定理 13. 直线上的闭集 F 或者是全直线, 或者是从直线上挖掉至多可数个互不相交的开区间所得到的集.

由孤立点的定义很容易知道, 直线上点集 A 的孤立点必是包含在 A 的余集中的某两个开区间的公共端点. 因此, 闭集的孤立点一定是它的两个余区间的公共端点. 完备集是没有孤立点的闭集, 所以, **完备集就是没有相邻接的余区间的闭集**.

4 Cantor 三分集

下面我们将讨论 Cantor 三分疏朗集, 这是实分析中的一个重要概念, 也常作为反例出现. 为此我们先给出疏朗集和稠密集的定义.

定义 20 (稠密和疏朗). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$,

1. 设 $F \subset \mathbb{R}^n$, 若对任意 $x \in F$ 和任意邻域 $U(x)$, $U(x) \cap E \neq \emptyset$, 则称 E 在 F 中**稠密**.
2. 若对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 和任意邻域 $U(x)$, 存在 $U(y) \subset U(x) \cap E^c$, 则称 E 是**疏朗集**或**无处稠密集**.

例如有限点集或收敛可数列都是疏朗集, 有理点集 \mathbb{Q}^n 在 \mathbb{R}^n 中稠密.

定义 21 (Cantor 三分集). 将 $E_0 = [0, 1]$ 三等分, 去掉中间的开区间, 剩下两个闭区间, 记这两个闭区间的并为 E_1 , 再把剩下的两个闭区间分别三等分, 分别去掉中间的开区间, 剩下 2^2 个闭区间, 记这些闭区间的并为 E_2 . 以此类推, 当进行到第 n 次时, 一共去掉 2^{n-1} 个开区间, 剩下 2^n 个长度为 3^{-n} 的相互隔离的闭区间, 记这些闭区间的并为 E_n . 如此继续下去, 就从 $[0, 1]$ 中去掉了可数多个互不相交且没有公共端点的开区间. 由定理13, 剩下的必是一个闭集, 称它为 Cantor **三分集**, 记为 P .

下面列举了 Cantor 集 P 的一些性质.

性质 3. 1. P 是完备集.

2. P 没有内点.

3. P 是零测集.

4. P 的基数为 \aleph .

综上所述, 我们将 Cantor 三分集的特点归纳为: 它是一个测度为零且基数为 \aleph 的疏朗完备集.

第二部分 Lebesgue 测度论

虽然我们在小学时期就学习了长度、面积等相关概念，但事实上我们从未严格定义过长度、面积和体积. 下面我们尝试定义这些概念.

我们可以把“长度”看作是 1 维实空间 \mathbb{R} (即实数轴) 的一个子集类 \mathcal{X} (\mathbb{R} 的每个子集不一定都有“长度”) 到实数域的一个映射 m . 我们首先规定

$$m([a, b]) := b - a.$$

其中 $a \leq b$. 这表明任何闭区间 $[a, b]$ 的长度为 $b - a$, 并蕴含了实数轴上任意一点的长度为零. 然后我们可以列出几条公理 (姑且称它们为公理): 设有实数轴上的一些点集构成的集类 \mathcal{M} , 对于每个 $E \in \mathcal{M}$, 都对应一个实数 m , 有以下性质:

1. 非负性: $m(E) \geq 0$;
2. 有限可加性: 若 E_1, E_2, \dots, E_n 两两不相交, 则 $m\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n m(E_i)$;
3. 正则性: $m([a, b]) = b - a$.

若集合 A 可通过平面上的正交变换 (平面的正交变换即为平移、旋转、反射以及它们的乘积) 变成了 B , 则称 A 和 B **全等或合同**. 我们规定, $m(A) = m(B)$ 当且仅当 $A \cong B$.

由于任意一点的长度都是零, 由可加性公理可知开区间 (a, b) 的长度也是 $b - a$, 半开半闭区间的长度亦然. 为了让整个实数轴也有长度, 我们规定 m 可以取到 $+\infty$.

类似地, 我们可以把面积看作是 2 维实空间 \mathbb{R}^2 (即实平面) 的一个子集类 \mathcal{X} 到实数域 \mathbb{R} 的一个映射 m . 我们首先规定一个邻边长分别为 a 和 b 的矩形 A 的面积为 $a \cdot b$, $a, b \geq 0$. 这蕴含了线段的面积为零. 以上的三条定理可以“原封不动”地来刻画面积. 依次下去, 还可以进一步把长度、面积的概念推广到体积以及 n 维 Euclid 空间 \mathbb{R}^n 中. 事实上物理中的**功** (work), **位移** (displacement), **冲量** (impulse) 都满足以上三条公理. 此外, 我们从长度公理中仅能求出有限个区间的并的长度, 对于无限个点集的并, 长度公理就无能为力了. 因此, 我们可以考虑用一个统一的概念来描述长度、面积等等, 并设法扩充其测量的范围, 这就引出了**测度** (measure) 的概念.

显然, 一下子推广到不可数无穷多个区间的长度是不现实的, 我们退而求其次, 考虑可数个区间的“长度”, 就有 Lebesgue 提出的测度公理:

实数轴上的一些点集构成的集类 \mathcal{M} , 对于每个 $E \in \mathcal{M}$, 都对应一个实数 m , 满足:

1. 非负性: $m(E) \geq 0$;
2. 可数可加性: 若 $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ 两两不相交, 则 $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$;
3. 正则性: $m([a, b]) = b - a$.

我们提出以下问题：满足 Lebesgue 测度公理且在集类 \mathcal{M} 上定义的实函数 $m(E)$ 是否存在？ \mathcal{M} 由哪些集合构成？是否每个集合都有测度？这就是本章要讨论的内容。

5 Lebesgue 外测度

定义 22 (Lebesgue 外测度). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 定义 E 的 Lebesgue 外测度为

$$m^*E = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_n|, \sum_{i=1}^{\infty} I_n \supset E\right\}$$

其中 I_n 是开域.

外测度具有以下三条基本性质：

定理 14. 1. 非负性： $m^*E \geq 0$, 规定 $m^*\emptyset = 0$;

2. 单调性： 设 $A \subset B$, 则 $m^*A \leq m^*B$;

3. 次可数可加性： $m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i)$.

证明. (1) 显然成立.

(2) 的证明. 设 $A \subset B$, 则任一列覆盖 B 的开域 $\{I_n\}$ 一定也是覆盖 A 的, 因而

$$m^*A \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_n|,$$

对所有能覆盖 B 的开域列取下确界即得

$$m^*A \leq \inf \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = m^*B.$$

(3) 的证明. 任给 $\varepsilon > 0$, 由 Lebesgue 外测度定义, 对每个 n 都应有一列开区间 $I_{n,1}, I_{n,2}, \dots, I_{n,m}, \dots$, 使 $E_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{n,m}$ 且

$$\sum_{m=1}^{\infty} |I_{n,m}| \leq m^*E_n + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

从而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n,m=1}^{\infty} I_{n,m},$$

且

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |I_{n,m}| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |I_{n,m}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(m^*E_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*E_n + \varepsilon.$$

可见

$$m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} |I_{n,m}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^* E_n + \varepsilon.$$

由于 ε 的任意性, 得

$$m^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i).$$

□

定理 15. 设区间 I , 则 $m^*I = |I|$.

证明. 1. 设 I 是闭区间. 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在开区间 I' , 使得 $I \subset I'$ 且

$$|I'| < |I| + \varepsilon.$$

由外测度定义, $m^*I < |I| + \varepsilon$, 由 ε 的任意性, 有

$$m^*I \leq |I|.$$

现在来证明 $m^*I \geq |I|$. 对于任给 $\varepsilon > 0$, 存在一系列开区间 $\{I_i\}$, 使 $I \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, 且

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < m^*I + \varepsilon.$$

由 Heine-Borel 有限覆盖定理, 在 $\{I_i\}$ 中存在有限多个区间, 不妨设为 I_1, I_2, \dots, I_n , 使得 $I \subset \bigcup_{i=1}^n I_i$.

因为 $I = \bigcup_{i=1}^n (I \cap I_i)$, 于此 $I \cap I_i$ 为区间, 由初等几何易知

$$|I| \leq \sum_{i=1}^n |I \cap I_i|,$$

故

$$|I| \leq \sum_{i=1}^n |I \cap I_i| \leq \sum_{i=1}^n |I_i| < m^*I + \varepsilon.$$

由于 ε 的任意性, 即得

$$|I| \leq m^*I.$$

于是 $m^*I = |I|$.

2. 设 I 为任意区间. 作闭区间 I_1, I_2 使 $I_1 \subset I \subset I_2$ 且

$$|I_2| - \varepsilon < |I| < |I_1| + \varepsilon$$

(I_2 可取为 I 的闭包 \bar{I}), 则

$$|I| - \varepsilon \leq |I_1| = m^* I_1 \leq m^* I \leq m^* I_2 = |I_2| < |I| + \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 得

$$m^* I = |I|.$$

□

6 Lebesgue 可测集

在5节中, 我们定义了 Lebesgue 外测度, 它的一个优点是任何集合都有外测度, 但是外测度只具有次可数可加性, 不具有可数可加性. 这意味着, 如果把外测度当作测度看, 使得任何集合都有测度, 这是办不到的. 这启发我们思考能否对外测度 m^* 的定义域进行限制, 即设法在 \mathbb{R}^n 中找出一个集类 \mathcal{M} , 使得 \mathcal{M} 中的集合满足 Lebesgue 测度公理.

首先, \mathcal{M} 对某些集合运算应该是封闭的. 例如对 \mathcal{M} 中的集合作可数并 (当然对有限并也成立, 只需在后面添加可数个空集即可)、作交或作差运算后仍在 \mathcal{M} 中, 而且对 \mathcal{M} 中一系列互不相交的集合 $\{E_i\}$, 应当满足可数可加性:

$$m^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^* E_i.$$

其次, 由 Lebesgue 的测度公理 (3), 自然应该要求 \mathcal{M} 包含 \mathbb{R}^n 中的所有有限开域. 又由于 \mathbb{R}^n 是一列有限开区间的可列并, 所以 \mathcal{M} 也应该包括 \mathbb{R}^n .

想要从 \mathbb{R}^n 中挑出集类 \mathcal{M} , 我们只需附加一个判断 \mathbb{R}^n 中的集合 E 属于 \mathcal{M} 的条件即可. 我们试从可数可加性条件来思考.

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 如果 $E \in \mathcal{M}$, 由于 \mathbb{R}^n 中任何开区间 I 都属于 \mathcal{M} , 由 \mathcal{M} 的运算封闭性, 则 $I \cap E$, $I \cap E^c$ 都应该属于 \mathcal{M} . 但由 $(I \cap E) \cap (I \cap E^c) = \emptyset$, $I = (I \cap E) \cup (I \cap E^c)$, 所以由可数可加性, 应该有

$$m^* I = m^* (I \cap E) + m^* (I \cap E^c). \quad (2)$$

反之, 如果存在某个开区间 I , 使2式不成立, 则 E 自然不应该属于 \mathcal{M} . 由上可见, 对于 \mathbb{R}^n 中点集 E 是否属于 \mathcal{M} , 我们可以用2是否对 \mathbb{R}^n 中任何开区间成立来判断. 事实上, 我们有下列结论.

引理 1. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则2式对 \mathbb{R}^n 中任何开区间 I 都成立的充要条件是对 \mathbb{R}^n 中的任何点集 T 都有

$$m^* T = m^* (T \cap E) + m^* (T \cap E^c). \quad (3)$$

证明. 充分性显然成立. 下证必要性. 设 T 为 \mathbb{R}^n 中的任意集合, 则由外测度定义, 对于任何 $\varepsilon > 0$, 有一列开区间 $\{I_n\}$ 使得

$$T \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \leq m^*T + \varepsilon.$$

但由于

$$T \cap E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_i \cap E), \quad T \cap E^c \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_i \cap E^c),$$

故

$$\begin{aligned} m^*(T \cap E) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(I_i \cap E), \\ m^*(T \cap E^c) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(I_i \cap E^c). \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(I_i \cap E) + \sum_{i=1}^{\infty} m^*(I_i \cap E^c) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} [m^*(I_i \cap E) + m^*(I_i \cap E^c)] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \leq m^*T + \varepsilon. \end{aligned}$$

由于 ε 的任意性, 即得

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \leq m^*T.$$

另一方面, 由 Lebesgue 外测度的次可加性, 有

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \geq m^*T.$$

故

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) = m^*T.$$

□

注. 这个引理是由 Carathéodory 给出的, 通常我们称 3 式为 Carathéodory 条件.

现在, 我们终于可以给出 Lebesgue 可测的定义.

定义 23 (Lebesgue 可测). 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的点集, 如果对任一点集 T 都有

$$m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c),$$

则称 E 是 Lebesgue 可测的, 也称为 L 可测. 这时 E 的 Lebesgue 外测度 m^*E 即称为 E 的 Lebesgue 测度, 记为 mE . Lebesgue 可测集全体记为 \mathcal{M} .

由上述定义, 我们可以得出 Lebesgue 测度的若干性质.

定理 16. 集合 E 可测的充要条件是对于任意 $A \subset E, B \subset E^c$, 总有

$$m^*(A \cup B) = m^*A + m^*B.$$

证明. 必要性 取 $T = A \cup B$, 则 $T \cap E = A, T \cap E^c = B$, 所以

$$m^*(A \cup B) = m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) = m^*A + m^*B.$$

充分性 对于任意 T , 令 $A = T \cap E, B = T \cap E^c$, 则 $A \subset E, B \subset E^c$ 且 $A \cup B = T$, 因此

$$m^*T = m^*(A \cup B) = m^*A + m^*B = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c).$$

□

定理 17 (补集的可测性). S 可测的充要条件是 S^c 可测.

证明. 事实上, 对于任意的 T ,

$$m^*T = m^*(T \cap S) + m^*(T \cap S^c) = m^*(T \cap (S^c)^c) + m^*(T \cap S^c).$$

□

定理 18 (并集的可测性). 设 S_1, S_2 都可测, 则 $S_1 \cup S_2$ 也可测, 并且当 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ 时, 对于任意集合 T 总有

$$m^*[T \cap (S_1 \cup S_2)] = m^*(T \cap S_1) + m^*(T \cap S_2).$$

证明. 首先证明 $S_1 \cup S_2$ 的可测性, 即证对于任意 T 总有

$$m^*T = m^*(T \cap (S_1 \cup S_2)) + m^*(T \cap (S_1 \cup S_2)^c).$$

事实上, 有

$$\begin{aligned} m^*T &= m^*(T \cap S_1) + m^*(T \cap S_1^c) && (S_1 \text{ 可测}) \\ &= m^*(T \cap S_1) + m^*[(T \cap S_1^c) \cap S_2] + m^*[(T \cap S_1^c) \cap S_2^c] && (S_2 \text{ 可测}) \end{aligned}$$

由 De Morgan 公式,

$$m^*[(T \cap S_1^c) \cap S_2^c] = m^*[T \cap (S_1 \cup S_2)^c]$$

又因 S_1 可测, 且 $T \cap S_1 \subset S_1, (T \cap S_1^c) \cap S_2 \subset S_1^c$, 故由定理16, 有

$$m^*(T \cap S_1) + m^*[(T \cap S_1^c) \cap S_2] = m^*[T \cap (S_1 \cup (S_1^c \cap S_2))] = m^*[T \cap (S_1 \cup S_2)],$$

整理, 即得

$$m^*T = m^*(T \cap (S_1 \cup S_2)) + m^*(T \cap (S_1 \cup S_2)^c).$$

其次当 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ 时, 因 S_1 可测, 且 $T \cap S_1 \subset S_1$, $T \cap S_2 \subset S_1^c$, 故由定理16, 有

$$m^*[T \cap (S_1 \cup S_2)] = m^*(T \cap S_1) + m^*(T \cap S_2).$$

□

推论 1 (有限并的可测性). 设 S_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 都可测, 则 $\bigcup_{i=1}^n S_i$ 也可测, 并且当 $S_i \cap S_j = \emptyset$ ($i \neq j$) 时, 对于任何集合 T 总有

$$m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right)\right) = \sum_{i=1}^n m^*(T \cap S_i).$$

定理 19 (交集的可测性). 设 S_1, S_2 都可测, 则 $S_1 \cap S_2$ 也可测.

证明. 因为 $S_1 \cap S_2 = [(S_1 \cap S_2)^c]^c = [S_1^c \cup S_2^c]^c$, 这就转化为了补集和并集的可测性结论. □

推论 2 (有限交的可测性). 设 S_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 都可测, 则 $\bigcap_{i=1}^n S_i$ 也可测.

定理 20 (差集的可测性). 设 S_1, S_2 都可测, 则 $S_1 \setminus S_2$ 也可测.

证明. 因为 $S_1 \setminus S_2 = S_1 \cap S_2^c$, 这就转化为了交集和补集的可测性结论. □

定理 21 (可数可加性). 设 $\{S_i\}$ 是一列互不相交的可测集, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ 也可测, 且

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} mS_i.$$

证明. 首先证明 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ 的可测性. 由有限并的可测性推论, 对任意 n , $\bigcup_{i=1}^n S_i$ 可测, 故对于任意 T 总有

$$\begin{aligned} m^*T &= m^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right)\right] + m^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right)^c\right] \\ &\geq m^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right)\right] + m^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)^c\right] \quad (\text{外测度的单调性}) \\ &= \sum_{i=1}^n m^*(T \cap S_i) + m^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)^c\right]. \quad (\text{有限并的可测性}) \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$m^*T \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap S_i) + m^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)^c\right]. \quad (4)$$

由外测度的次可数可加性, 故有

$$m^*T \geq m^* \left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right) \right] + m^* \left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right)^c \right].$$

另一方面由于

$$T = \left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right) \right] \cup \left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right)^c \right],$$

又有

$$m^*T \leq m^* \left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right) \right] + m^* \left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right)^c \right].$$

因此

$$m^*T = m^* \left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right) \right] + m^* \left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right)^c \right].$$

这就证明了 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ 的可测性. 在4式中, 令 $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$, 这时由于 $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right) \cap S_i = S_i$, 便得

$$m \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m S_i.$$

另一方面, 由外测度的次可数可加性,

$$m \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m S_i.$$

故

$$m \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} m S_i.$$

□

推论 3 (可数并的可测性). 设 $\{S_i\}$ 是一列可测集合, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ 也可测.

证明. 因 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ 可表示为互不相交的集合的并:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = S_1 \cup (S_2 \setminus S_1) \cup [S_3 \setminus (S_1 \cup S_2)] \cup \cdots,$$

由有限并、差、可数可加性结论即得.

□

推论 4 (可数交的可测性). 设 $\{S_i\}$ 是一列可测集合, 则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i$ 也可测.

证明. 因 $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i^c$, 应用补与可数并的结论即得.

□

由上述性质的讨论, 我们可知, Lebesgue 可测集对可数并、可数交以及差集余集的运算都是封闭的. 此外, 定理21表明了 Lebesgue 测度具有可数可加性, 它是满足 Lebesgue 测度公理的. 下面, 我们再介绍几个性质.

定理 22. 设 $\{S_i\}$ 是一列递增的可测集合

$$S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_n \subset \cdots,$$

令 $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, 则

$$mS = \lim_{n \rightarrow \infty} mS_n.$$

证明. 因有

$$S = S_1 \cup (S_2 \setminus S_1) \cup (S_3 \setminus S_2) \cup \cdots \cup (S_n \setminus S_{n-1}) \cup \cdots,$$

其中各被并项都可测且互不相交, 由 Lebesgue 测度的可数可加性, 有 (令 $S_0 = \emptyset$)

$$\begin{aligned} mS &= \sum_{i=1}^{\infty} m(S_i \setminus S_{i-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m(S_i \setminus S_{i-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} m \left[\bigcup_{i=1}^n (S_i \setminus S_{i-1}) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} mS_n. \end{aligned}$$

□

定理 23. 设 $\{S_i\}$ 是一列递减的可测集合

$$S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots,$$

令 $S = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, 则当 $mS_1 < \infty$ 时,

$$mS = \lim_{n \rightarrow \infty} mS_n.$$

证明. 由于 S_n 可测, 则可数交 S 也可测. 又因 S_n 递减, 从而 $\{S_1 \setminus S_n\}$ 递增, 故由定理22有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m[S_1 \setminus S_n] = m \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (S_1 \setminus S_n) \right] = m(S_1 \setminus S).$$

因 $mS_1 < \infty$ 及

$$(S_1 \setminus S_n) \cup S_n = S_1,$$

$$m(S_1 \setminus S_n) + mS_n = mS_1,$$

有

$$m(S_1 \setminus S) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(S_1 \setminus S_n) = mS_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} mS_n.$$

由于

$$m(S_1 \setminus S) = mS_1 - mS,$$

故

$$mS = \lim_{n \rightarrow \infty} mS_n.$$

□

注. 条件 $mS_1 < \infty$ 是必要的.

定理 24 (平移不变性). 对任意实数 α , 定义映射 $\tau_\alpha: x \rightarrow x + \alpha$, $x \in \mathbb{R}^n$. 则对任何集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 有 $m^*E = m^*(\tau_\alpha E)$, 且当 E 为 Lebesgue 可测时, $\tau_\alpha E$ 也 Lebesgue 可测 (且测度不变).

证明. 对任何一列开域 $\{I_i\}$, $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, 同时就有 $\tau_\alpha I_i$ 亦为开域, 以及 $\tau_\alpha E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (\tau_\alpha I_i)$, 所以

$$m^*E = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right\} \geq m^*(\tau_\alpha E).$$

但 $\tau_\alpha E$ 再平移 $\tau_{-\alpha}$ 后就是 E , 所以 $m^*(\tau_\alpha E) \geq m^*E$. 这样就得到 $m^*E = m^*(\tau_\alpha E)$.

如果 E 为 Lebesgue 可测, 那么对于任何 $T \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c).$$

由于 $\tau_\alpha(T \cap E) = \tau_\alpha T \cap \tau_\alpha E$, $\tau_\alpha(T \cap E^c) = \tau_\alpha T \cap \tau_\alpha E^c$, 因此从上式得到

$$m^*(\tau_\alpha T) = m^*(\tau_\alpha T \cap \tau_\alpha E) + m^*(\tau_\alpha T \cap \tau_\alpha E^c),$$

而上式中 $\tau_\alpha T$ 为任意集, 因此 $\tau_\alpha E$ 为 Lebesgue 可测. □

定理说明, 集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 经过平移后, 它的外测度不变, 对于 Lebesgue 可测集, 平移后仍为 Lebesgue 可测. 这个性质称为 Lebesgue 测度的平移不变性.

用类似的方法还可以证明 Lebesgue 测度的反射不变性.

定理 25 (反射不变性). 定义映射 $\tau: x \rightarrow -x$, $x \in \mathbb{R}^n$. 则对任何集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 有 $m^*E = m^*(\tau E)$, 且当 E 为 Lebesgue 可测时, τE 也 Lebesgue 可测 (且测度不变).

证明不再赘述.

7 可测集类

这一节我们介绍常见的可测集.

定理 26. 1. 凡外测度为零的集皆可测, 称为零测度集或零测集;

2. 零测集的任何子集仍为零测集;
3. 至多可数个零测集的并仍为零测集.

用 Lebesgue 测度的定义与简单性质即可证明, 这里不再赘述.

定理 27 (区间皆可测). 区间 I 都是可测集, 且 $mI = |I|$.

证明. 设 I_0 是异于区间 I 的任一开区间, 则

$$|I_0| = m^*(I_0 \cap I) + m^*(I_0 \cap I^c).$$

事实上, 在 \mathbb{R} 中显然, 在 \mathbb{R}^2 中由于 $I_0 \cap I$ 为区间, 而 $I_0 \cap I^c$ 可以分解成至多四个不相交的区间 $I_i, i = 1, 2, 3, 4$, 从而可证

$$m^*(I_0 \cap I^c) \leq \sum_{i=1}^4 |I_i|,$$

因此

$$m^*(I_0 \cap I) + m^*(I_0 \cap I^c) \leq |I_0|,$$

另一方面, 反向不等式总成立, 于是

$$m^*(I_0 \cap I) + m^*(I_0 \cap I^c) = |I_0|,$$

\mathbb{R}^n 情形仿此.

由 Carathéodory 引理及 $m^*I_0 = |I_0|$, 对 \mathbb{R}^n 中任意点集 T 都有

$$m^*T = m^*(T \cap I) + m^*(T \cap I^c).$$

从而 I 可测. □

定理 28. 凡开集、闭集皆可测.

证明. 任何非空开集可表示为至多可数个区间的并, 而区间是可测的. 开集既可测, 闭集作为开集的余自然也可测. □

为了进一步推广可测集类, 我们给出下面的定义.

定义 24 (σ 代数). 设 Ω 是由 \mathbb{R}^n 的一些子集组成的集类, 如果 Ω 满足条件

1. (包含空集) $\emptyset \in \Omega$;
2. (在补集下封闭) 若 $E \in \Omega$, 则 $E^c \in \Omega$;
3. (在可数并下封闭) 若 $E_n \in \Omega, n = 1, 2, \dots$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Omega$.

则称 Ω 是 \mathbb{R}^n 的一个 σ 代数.

可以看出, \mathbb{R}^n 中所有 Lebesgue 可测集全体组成的集类 \mathcal{M} 是一个 σ 代数 (称之为 Lebesgue 代数).

定义 25 (测度). 设 Ω 是 \mathbb{R}^n 上的一个 σ 代数. 如果定义在 Ω 上的非负值集函数 μ 满足条件

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. 若 $E_n \in \Omega$, $n = 1, 2, \dots$, 且任意 $n \neq m$, $E_n \cap E_m = \emptyset$, 有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

则称 μ 是 Ω 上的 (正) 测度.

易见, Lebesgue 测度 m 是定义在 σ 代数上的测度.

由 σ 代数的定义易知: 如果 $\{\Omega_\alpha\}$ 是 \mathbb{R}^n 上的一族 σ 代数, 则它们的交集 $\bigcap_{\alpha} \Omega_\alpha$ 也是 σ 代数.

定义 26 (集类产生的 σ 代数). 设 Σ 是 \mathbb{R}^n 的一个子集类, 则称所有包含 Σ 的 σ 代数的交集为 Σ 产生的 σ 代数.

由于 \mathbb{R}^n 全体子集组成的子集类是包含 Σ 的 σ 代数, 因此包含 Σ 的 σ 代数不是空集, 并且是包含 Σ 的最小的 σ 代数.

定义 27 (Borel 代数). 由 \mathbb{R}^n 中全体开集组成的子集类生成的 σ 代数, 记为 \mathcal{B} , 称为 Borel 代数, Borel 代数里的元素称为 Borel 集.

因为开集都是 Lebesgue 可测集, 因此 $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$, 因而有以下定理.

定理 29. 凡 Borel 集都是 Lebesgue 可测集.

定义 28 (测度空间). 若 Ω 是 \mathbb{R}^n 上的一个 σ 代数, μ 是 Ω 上的测度, 则称 $(\mathbb{R}^n, \Omega, \mu)$ 为测度空间.

例如, 上述 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$ 和 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, m)$ 都是测度空间.

定义 29. 设集合 G 可表示为一列开集 $\{G_i\}$ 的交集:

$$G = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i,$$

则称 G 为 G_δ 型集.

设集合 F 可表示为一列闭集 $\{F_i\}$ 的并集:

$$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i,$$

则称 F 为 F_σ 型集.

显然 G_δ 型集及 F_δ 型集都是 Borel 集.

我们已经知道, $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$, 即 Borel 集都是 Lebesgue 可测集. 但反之不成立. 我们下面将讨论 Lebesgue 可测集合类中除了 Borel 集之外, 还存在什么样的集合.

定理 30. 设 E 是任一可测集, 则一定存在 G_δ 型集 G , 使 $G \supset E$, 且 $m(G \setminus E) = 0$.

证明. (1) 先证: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 G , 使 $G \supset E$, 且 $m(G \setminus E) < \varepsilon$.

先设 $mE < \infty$, 则由测度定义, 有一列开区间 $\{I_i\} (i = 1, 2, \dots)$, 使 $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supset E$, 且

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < mE + \varepsilon.$$

令 $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, 则 G 为开集, $G \supset E$, 且

$$mE \leq mG \leq \sum_{i=1}^{\infty} mI_i = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < mE + \varepsilon.$$

因此, $mG - mE < \varepsilon$ (这里用到 $mE < \infty$), 从而 $m(G \setminus E) < \varepsilon$.

其次, 设 $mE = \infty$, 这时 E 必为无界集, 但它总可表示成可数多个互不相交的有界可测集的并, 即 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n (mE_n < \infty)$, 对每个 E_n 应用上面结果, 可找到开集 $G_n \supset E_n$ 使 $m(G_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

令 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, 则 G 为开集, $G \supset E$, 且

$$G \setminus E = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E_n),$$

$$m(G \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(G_n \setminus E_n) < \varepsilon.$$

(2) 依次取 $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, 由上述证明, 存在开集 $G_n \supset E$, 使 $m(G_n \setminus E) < \frac{1}{n}$.

令 $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, 则 G 为 G_δ 型集, $G \supset E$, 且

$$m(G \setminus E) \leq m(G_n \setminus E) < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

故 $m(G \setminus E) = 0$. □

定理 31. 设 E 是任一可测集, 则一定存在 F_δ 型集 F , 使 $F \subset E$, 且 $m(E \setminus F) = 0$.

证明. 因 E^c 也可测, 由定理30可知, 存在 G_δ 型集 $G \supset E^c$, 使 $m(G \setminus E^c) = 0$.

令 $F = G^c$, 则 F 为 F_δ 型集, $F \subset E$, 且

$$m(E \setminus F) = m(E \setminus G^c) = m(G \setminus E^c) = 0.$$

□

以上两个定理说明了只要有了全部 G_δ 型集或 F_δ 型集 (它们只是 Borel 集的一部分) 和全部 Lebesgue 零测集, 就可以得到一切 Lebesgue 可测集.

定理 32 (正则性). 若 E 是一可测集, 则

1. $mE = \inf\{mG | G \text{ 是开集}, E \subset G\}$ (外正则性);
2. $mE = \sup\{mK | K \text{ 是紧集}, K \subset E\}$ (内正则性).

证明. (1) 的证明: 若 $mE = \infty$, 则对任意 $G \supset E$, $mG = \infty$, 因此 (1) 成立.

若 $mE < \infty$, 则由定理30的证明, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supset E$, $m(G \setminus E) < \varepsilon$, 因此

$$mG = m(G \setminus E) + mE < mE + \varepsilon.$$

由确界定义, (1) 成立.

(2) 的证明: 若 E 有界, 则存在有界闭区间 I , 使得 $E \subset I$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supset I \setminus E$, 使得 $m(G \setminus (I \setminus E)) < \varepsilon$. 令 $K = I \setminus G$, 则 K 是紧集, 且

$$E \setminus K = E \cap G \subset G \setminus (I \setminus E),$$

故

$$m(E \setminus K) < \varepsilon.$$

于是当 E 有界时, (2) 成立.

若 E 无界, 对任意 n , 令

$$E_n = \{x | d(x, 0) < n\} \cap E,$$

则 $\{E_n\}$ 单调可测, $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} mE_n = mE$. 由上述证明, 存在紧集 $K_n \subset E_n$,

$$mE_n - \frac{1}{n} \leq mK_n \leq mE_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

由此得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} mK_n = mE.$$

因此无论 $mE = \infty$ 或 $mE < \infty$, (2) 成立.

□