

# Lebesgue 测度论

## 目录

<b>第一部分 <math>\mathbb{R}^n</math> 的拓扑</b>	<b>2</b>
1 度量空间, $n$ 维 Euclid 空间	2
2 内点, 界点, 聚点	4
3 开集、闭集、紧集、完备集	6
4 Cantor 三分集	10
<b>第二部分 Lebesgue 测度论</b>	<b>12</b>
5 Lebesgue 外测度	13
6 Lebesgue 可测集	15
7 可测集类	21

## 第一部分 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑

### 1 度量空间, $n$ 维 Euclid 空间

把多个元素放在一起就构成了集合, 但是集合间的元素是松散的. 我们还需要定义集合的元素之间的“关系”或“结构”, 有了这层“关系”或“结构”, 就构成了一个空间.

**定义 1** (度量空间). 设  $X$  是一个集合, 若对于  $X$  中任意两个元素  $x, y$ , 都有唯一确定的实数  $d(x, y)$  与之对应, 而且这一对应关系满足下列条件:

1.  $d(x, y) \geq 0$ , 当且仅当  $x = y$  时等号成立;
2.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ , 对任意  $z$  都成立,

则称  $d(x, y)$  是  $x, y$  之间的距离, 称  $(X, d)$  为度量空间或距离空间. $X$  中的元素称为点, 条件(2) 称为三点不等式.

注. 距离  $d$  有对称性, 即  $d(x, y) = d(y, x)$ . 事实上, 在三点不等式中取  $z = x$ , 则

$$d(x, y) \leq d(x, x) + d(y, x) = d(y, x).$$

由于  $x, y$  的次序是任意的, 同理可证  $d(y, x) \leq d(x, y)$ , 这就得到  $d(x, y) = d(y, x)$ .

注. 如果  $(X, d)$  是度量空间,  $Y$  是  $X$  的一个非空子集, 则  $(Y, d)$  也是一个度量空间, 称为  $X$  的子空间.

**定义 2** ( $n$  维 Euclid 空间). 设  $n$  是一个正整数, 将由  $n$  个实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  按确定的次序排成的数组  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的全体组成的集合记为  $\mathbb{R}^n$ , 对  $\mathbb{R}^n$  中任意两点

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n),$$

规定距离

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i)^2}.$$

容易验证  $d(x, y)$  满足距离的条件. 将  $(\mathbb{R}^n, d)$  称为  $n$  维 Euclid 空间, 其中  $d$  称为 Euclid 距离.

注. 对  $d(x, y)$  满足距离的条件的验证: 首先, 条件(1) 显然成立, 对于条件(2), 由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

得到

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i^2 \\ &= \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2. \end{aligned}$$

令  $z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ ,  $a_i = \zeta_i - \xi_i$ ,  $b_i = \eta_i - \zeta_i$ , 则

$$\eta_i - \xi_i = a_i + b_i.$$

代入上面不等式即为三点不等式.

此外, 在  $\mathbb{R}^n$  中还可以用下面的方法定义其他的距离:

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|.$$

容易验证  $\rho$  也满足条件 (1) 和条件 (2). (称  $\rho$  为 Manhattan 距离) 由此可知, 在一个集合中引入距离的方法可以不限于一种. 之后我们仅讨论  $n$  维 Euclid 空间和 Euclid 距离  $d(x, y)$ .

下面我们将考察  $\mathbb{R}^n$  中的极限、开集、闭集、紧集等一系列概念, 它们的基础都是邻域, 而邻域仅依靠距离即可作出. 本章的结论对于一般的度量空间也是成立的, 之后在泛函分析的学习中还会涉及.

我们从定义邻域的概念开始.

**定义 3** (邻域).  $\mathbb{R}^n$  中所有和定点  $P_0$  的距离小于定数  $\delta (> 0)$  的点的全体, 即集合

$$\{P | d(P, P_0) < \delta\}$$

称为点  $P_0$  的  $\delta$  邻域, 记作  $U(P_0, \delta)$ .  $P_0$  称为邻域的中心,  $\delta$  称为邻域的半径. 在不需要特别指出是怎样的一个半径时, 也干脆说是  $P_0$  的一个邻域, 记作  $U(P_0)$ . 显然, 在  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  中的  $U(P_0, \delta)$  就是以  $P_0$  为中心,  $\delta$  为半径的开区间, 开圆和开球.

容易证明邻域具有下面的基本性质:

**性质 1.** 1.  $P \in U(P)$ ;

2. 对于  $U_1(P)$  和  $U_2(P)$ , 存在  $U_3(P) \subset U_1(P) \cap U_2(P)$ ;

3. 对于  $Q \in U(P)$ , 存在  $U(Q) \subset U(P)$ ;

4. 对于  $P \neq Q$ , 存在  $U(P)$  和  $U(Q)$ , 使  $U(P) \cap U(Q) = \emptyset$ .

**定义 4 (极限).** 设  $\{P_n\}$  为  $\mathbb{R}^m$  中一点列,  $P_0 \in \mathbb{R}^m$ , 如果当  $n \rightarrow \infty$  时有  $d(P_n, P_0) \rightarrow 0$ , 则称点列  $\{P_n\}$  收敛于  $P_0$ . 记为  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$  或  $P_n \rightarrow P_0 (n \rightarrow \infty)$ .

**注.** 用邻域的术语来定义  $\{P_n\}$  收敛于  $P_0$ : 对于  $P_0$  的任一邻域  $U(P_0)$ , 存在某个自然数  $N$ , 对任意  $n > N$ , 都有  $P_n \in U(P_0)$ .

**定义 5 (点集的距离).** 两个非空点集  $A, B$  的距离定义为

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) | x \in A, y \in B\}.$$

**注.** 特别地, 当其中一个点集为单点集时, 我们就定义了点与点集的距离.

**定义 6 (点集的直径).** 一个非空点集  $E$  的直径定义为

$$\delta(E) = \sup_{P, Q \in E} d(P, Q).$$

**定义 7 (有界点集).** 设  $E$  是  $\mathbb{R}^n$  中一点集, 若  $\delta(E) < \infty$ , 则称  $E$  为有界点集.

**注.** 空集也作为有界点集.

**注.** 显然,  $E$  为有界点集的充要条件是存在常数  $K > 0$ , 使对于所有的  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ , 都有  $|x_i| \leq K (i = 1, 2, \dots, n)$ . 这等价于: 存在  $K > 0$ , 对所有  $x \in E$ , 都有  $d(x, \mathbf{0}) \leq K$ , 这里  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ , 称为  $n$  维 Euclid 空间的原点.

**定义 8.** 点集  $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) | a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  称为一个开区间 ( $n$  维), 若将其中不等式一律换成  $a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 则称之为一个闭区间. 类似地, 我们还可以定义左开右闭区间、左闭右开区间. 当上述各种区间无区别的必要时, 统称为区间, 记作  $I$ . 把  $b_i - a_i (i = 1, 2, \dots, n)$  称为  $I$  的第  $i$  个“边长”,  $\prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$  称为  $I$  的“体积”, 记为  $|I|$ .

## 2 内点, 界点, 聚点

**定义 9 (内点, 外点, 界点).** 如果存在  $P_0$  的某一邻域  $U(P_0)$ , 使  $U(P_0) \subset E$ , 则称  $P_0$  为  $E$  的内点. 如果  $P_0$  是  $E^c$  的内点, 则称  $P_0$  是  $E$  的外点. 如果  $P_0$  既非  $E$  的内点又非  $E$  的外点, 也就是说  $P_0$  的任一邻域既有属于  $E$  的点, 又有不属于  $E$  的点, 则称  $P_0$  为  $E$  的界点或边界点.

**注.** 上述三个概念中当然以内点最为重要, 因为其他两个概念都是由此派生出来的.

**定义 10 (聚点).** 设  $E$  是  $\mathbb{R}^n$  中一点集,  $P_0$  为  $\mathbb{R}^n$  中一定点, 如果  $P_0$  的任一邻域内都含有无穷多个属于  $E$  的点, 则称  $P_0$  为  $E$  的一个聚点.

注. 由聚点定义可知有限集没有聚点.

**定理 1.** 下面三个陈述是等价的:

1.  $P_0$  是  $E$  的聚点;
2. 在  $P_0$  的任一邻域内, 至少含有一个属于  $E$  而异于  $P_0$  的点;
3. 存在  $E$  中互异的点所成点列  $\{P_n\}$ , 使  $P_n \rightarrow P_0 (n \rightarrow \infty)$ .

显然  $E$  的内点一定是  $E$  的聚点, 但  $E$  的聚点不一定是  $E$  的内点, 还可能是  $E$  的界点. 其次,  $E$  的内点一定属于  $E$ , 但  $E$  的聚点可以属于  $E$  也可以不属于  $E$ .

**定义 11 (孤立点).** 设  $E$  是  $\mathbb{R}^n$  中一点集,  $P_0$  为  $\mathbb{R}^n$  中一定点, 如果  $P_0$  属于  $E$  但不是  $E$  的聚点, 则  $P_0$  称为  $E$  的孤立点.

注. 由定理 1 可知,  $P_0$  是  $E$  的孤立点的充要条件是: 存在  $P_0$  的某邻域  $U(P_0)$ , 使得  $E \cap U(P_0) = \{P_0\}$ . 由此又知,  $E$  的界点不是聚点就是孤立点.

综上所述, 所有  $\mathbb{R}^n$  中的点, 对  $E$  来说可以分为内点、界点、外点或分为聚点、孤立点、外点. 但是, 对一个具体的点集  $E$  来说, 以上两种分类的三种点不一定都出现. 界点和聚点可以属于  $E$ , 也可以不属于  $E$ .

根据上面引入的概念, 对于一个给定的点集  $E$ , 我们可以考虑上述各种点的集合, 其中最重要的是下面四种.

**定义 12.** 设  $E$  是  $\mathbb{R}^n$  中的一个点集, 有

1.  $E$  的全体内点所成的集合, 称为  $E$  的开核, 记作  $\mathring{E}$ .
2.  $E$  的全体聚点所成的集合, 称为  $E$  的导集, 记作  $E'$ .
3.  $E$  的全体界点所成的集合, 称为  $E$  的边界, 记作  $\partial E$ .
4.  $E \cup E'$  称为  $E$  的闭包, 记作  $\overline{E}$ .

它们都可以用集合的语言描述如下.

1.  $\mathring{E} = \{x | \exists U(x) \subset E\};$
2.  $E' = \{x | \forall U(x), U(x) \cap E \setminus \{x\} \neq \emptyset\};$
3.  $\partial E = \{x | U(x) \cap E \neq \emptyset \text{ 且 } U(x) \cap E^c \neq \emptyset\};$
4.  $\overline{E} = \{x | \forall U(x), U(x) \cap E \neq \emptyset\}.$

注. 由 (4) 可以看出, 闭包就是包含  $E$  的内点、界点、聚点、孤立点(可能会有重合)而只不含  $E$  的外点的集合.

注. 由 (4) 还可得到

$$\overline{E} = E \cup \partial E = \overset{\circ}{E} \cup \partial E = E' \cup \{E\text{的孤立点}\}$$

以及闭包与内核的对偶关系

$$(\overset{\circ}{E})^c = \overline{E^c}, \quad (\overline{E})^c = \overset{\circ}{E^c}.$$

**定理 2.** 设  $A \subset B$ , 则  $A' \subset B'$ ,  $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ ,  $\overline{A} \subset \overline{B}$ .

**定理 3.**  $(A \cup B)' = A' \cup B'$ .

证明. 因为  $A \subset A \cup B$ ,  $B \subset A \cup B$ , 故从定理2可知,  $A' \subset (A \cup B)', B' \subset (A \cup B)'$ , 从而

$$A' \cup B' \subset (A \cup B)'.$$

另一方面, 假设  $P \in (A \cup B)'$ , 则必有  $P \in A' \cup B'$ . 即  $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$ . 否则, 若  $P \notin A' \cup B'$ , 那么将有  $P \notin A'$  且  $P \notin B'$ . 因而有  $P$  的某一邻域  $U_1(P)$ , 在  $U_1(P)$  内除  $P$  外不含  $A$  的任何点, 同时有  $P$  的某一邻域  $U_2(P)$ , 在  $U_2(P)$  内除  $P$  外不含  $B$  的任何点, 则由邻域的基本性质 (2) 知, 存在  $U_3(P) \subset U_1(P) \cap U_2(P)$ , 在  $U_3(P)$  中除点  $P$  外不含  $A \cup B$  中的任何点, 这与  $P \in (A \cup B)'$  的假设矛盾.  $\square$

**定理 4** (Bolzano-Weierstrass 定理). 有界无限点集至少有一个聚点.

证明方法同数学分析中  $\mathbb{R}$  和  $\mathbb{R}^2$  时的证明, 在此不再赘述.

**定理 5.** 设  $E \neq \emptyset$ ,  $E \neq \mathbb{R}^n$ , 则  $E$  至少有一界点(即  $\partial E \neq \emptyset$ ).

证明. 设  $P_0 \in E$ ,  $P_1 \in E^c$ , 定义  $P_t = (1-t)P_0 + tP_1$ ,  $t \in [0, 1]$ . 设  $t_0 = \sup\{t | P_t \in E\}$ . 下证  $P_{t_0} \in \partial E$ .

若  $P_{t_0} \in E$ , 则  $t_0 \neq 1$ . 对任意  $t \in (t_0, 1]$ ,  $P_t \notin E$ . 对任意  $\delta > 0$ , 存在  $t \in (t_0, 1]$ , 使得  $P_t \in E^c \cap U(P_{t_0}, \delta)$ , 于是  $P_{t_0} \in \partial E$ .

若  $P_{t_0} \in E^c$ , 即  $P_{t_0} \notin E$ , 则  $t_0 \neq 0$ . 存在  $t_n \in [0, t_0)$ ,  $t_n \rightarrow t_0$ , 且  $P_{t_n} \in E$ . 对任意  $\delta > 0$ , 存在  $P_{t_n} \in E \cap U(P_{t_0}, \delta)$ . 因  $P_{t_0} \in U(P_{t_0}, \delta) \cap E^c$ , 于是也有  $P_{t_0} \in \partial E$ .  $\square$

### 3 开集、闭集、紧集、完备集

**定义 13** (开集). 设  $E \subset \mathbb{R}^n$ , 如果  $E$  的每一点都是  $E$  的内点, 则称  $E$  为开集.

例如整个空间  $\mathbb{R}^n$  是开集, 空集是开集, 在  $\mathbb{R}$  中任意开区间  $(a, b)$  是开集, 在  $\mathbb{R}^2$  中  $E = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$  是开集(但它在  $\mathbb{R}^3$  中就不是开集了, 想想看, 这是为什么?).

**定义 14 (闭集).** 设  $E \subset \mathbb{R}^n$ , 如果  $E$  的每一个聚点都属于  $E$ , 则称  $E$  为**闭集**.

例如整个空间  $\mathbb{R}^n$  是闭集, 空集是闭集, 在  $\mathbb{R}$  中任意闭区间  $[a, b]$  是闭集, 任意的有限集合都是闭集.

开集、闭集利用开核、闭包等术语来说, 就是

$$E \text{ 为开集} \iff E \subset \overset{\circ}{E}, \text{ 即 } E = \overset{\circ}{E}.$$

$$E \text{ 为闭集} \iff E' \subset E \text{(或 } \partial E \subset E\text{).}$$

今后开集常用字母  $G$  表示, 闭集常用字母  $F$  表示.

**定理 6.** 对任何  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\overset{\circ}{E}$  是开集,  $E'$  和  $\overline{E}$  都是闭集. (这也是  $\overset{\circ}{E}$  称为开核,  $\overline{E}$  称为闭包的缘由)

证明. 首先证明  $\overset{\circ}{E}$  是开集. 设  $P \in \overset{\circ}{E}$ , 由  $E$  的定义知, 存在邻域  $U(P) \subset E$ , 对于任意的  $Q \in U(P)$ , 由邻域的基本性质 (3) 知, 存在  $U(Q)$  使得  $U(Q) \subset U(P) \subset E$ , 即  $Q$  是  $E$  的内点, 故  $U(Q) \subset \overset{\circ}{E}$ , 所以  $P$  是  $\overset{\circ}{E}$  的内点, 故  $\overset{\circ}{E}$  是开集.

其次证明  $E'$  是闭集. 设  $P_0 \in (E')'$ , 则由定理1(2) 可知, 在  $P_0$  的任一邻域  $U(P_0)$  内, 至少含有一个属于  $E'$  而异于  $P_0$  的点  $P_1$ . 因为  $P_1 \in E'$ , 于是又有属于  $E$  的  $P_2 \in U(P_0)$ , 而且还可以要求  $P_2 \neq P_0$ , 再次利用该定理, 即得  $P_0 \in E'$ . 所以  $E'$  是闭集.

最后证明  $\overline{E}$  是闭集. 由闭包的定义及定理3, 有

$$(\overline{E})' = E' \cup (E')' \subset E' \cup E' = E' \subset \overline{E}.$$

从而  $\overline{E}$  是闭集. □

**定理 7 (开集与闭集的对偶性).** 设  $E$  是开集, 则  $E^c$  是闭集; 设  $E$  是闭集, 则  $E^c$  是开集.

证明. 只需证明第一部分.

证法一: 设  $E$  是开集, 而  $P_0$  是  $E^c$  的任一聚点, 那么,  $P_0$  的任一邻域都有不属于  $E$  的点. 这样  $P_0$  就不可能是  $E$  的内点, 从而不属于  $E$  (因为  $E$  是开集), 也就是  $P_0 \in E^c$ . 由闭集的定义得  $E^c$  为闭集.

证法二: 设  $E$  是开集, 则  $E = \overset{\circ}{E}$ , 由闭包、开核对偶关系, 得  $\overline{E^c} = (\overset{\circ}{E^c})^c = E^c$ , 可见  $E^c$  是闭集. □

由于开集和闭集的这种对偶关系, 在许多情形下, 我们将闭集看作是开集派生出来的概念. 也就是说, 如果定义了开集, 闭集也就随之确定.

**定理 8.** 任意多个开集的并仍是开集, 有限多个开集的交仍是开集.

证明. 第一部分显然. 对第二部分, 有限多个开集的交仍是开集总能递归为两个开集的交仍是开集. 故只需证明两个开集的交的情况.

设  $G_1, G_2$  为开集, 任取  $P_0 \in G_1 \cap G_2$ . 因  $P_0 \in G_i (i = 1, 2)$ , 故存在  $U_i(P_0) \subset G_i (i = 1, 2)$ . 由邻域的基本性质 (2), 存在  $U_3(P_0) \subset U_1(P_0) \cap U_2(P_0)$ , 从而  $U_3(P_0) \subset G_1 \cap G_2$ , 可见  $P_0$  是  $G_1 \cap G_2$  的内点. □

注. 任意多个开集的交不一定是开集. 例如

$$G_n = \left( -1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

每个  $G_n$  是开集, 但  $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = [-1, 1]$  不是开集.

**定理 9.** 任意多个闭集的交仍为闭集, 有限多个闭集的并仍为闭集.

证明. 利用 De Morgan 公式.

设  $\Lambda = \{1, 2, \dots\}$ ,  $F_i, i \in \Lambda$  (或  $i = 1, 2, \dots, m$ ) 是闭集, 则由开集和并集的对偶关系知  $F_i^c$  是开集, 从而由定理 8 知,  $\bigcup_{i \in \Lambda} F_i^c$  (或  $\bigcap_{i=1}^m F_i^c$ ) 也是开集, 由 De Morgan 公式有

$$\bigcap_{i \in \Lambda} F_i = (\bigcup_{i \in \Lambda} F_i^c)^c \quad \text{或} \quad \bigcup_{i=1}^m F_i = (\bigcap_{i=1}^m F_i^c)^c,$$

故再由开集和并集的对偶关系可知  $\bigcap_{i \in \Lambda} F_i$  或  $\bigcup_{i=1}^m F_i$  是闭集.  $\square$

注. 任意多个闭集的并不一定是闭集. 例如

$$F_n = \left[ \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right], \quad n = 3, 4, \dots,$$

每个  $F_n$  是闭集, 但  $\bigcup_{n=3}^{\infty} F_n = (0, 1)$  不是闭集.

**性质 2.** 设  $F_1, F_2$  是  $\mathbb{R}$  中两个互不相交的闭集, 则存在两个互不相交的开集  $G_1, G_2$ , 使  $G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$ .

在数学分析中我们已经学习了以下形式的 Heine-Borel 有限覆盖定理: 设  $I$  是  $\mathbb{R}^n$  中的闭区间,  $\mathcal{M}$  是一族开区间, 它覆盖了  $I$ , 则在  $\mathcal{M}$  中一定存在有限多个开区间, 它们同样覆盖了  $I$ .

我们下面要把上述定理推广成更一般的形式.

**定理 10 (Heine-Borel 定理).** 设  $F$  是一个有界闭集,  $\mathcal{M}$  是一族开集, 它覆盖了  $F$ , 则在  $\mathcal{M}$  中一定存在有限多个开集, 它们同样覆盖了  $F$ .

证明. 因  $F$  是有界闭集, 所以在  $\mathbb{R}^n$  中存在闭区间  $I$  包含  $F$ . 记  $\mathcal{D}$  为由  $\mathcal{M}$  中的全体开集与开集  $F^c$  一起组成的新开集族, 则  $\mathcal{D}$  覆盖了  $\mathbb{R}^n$ , 因此也覆盖了  $I$ . 对于  $I$  中任一点  $P$ , 存在  $\mathcal{D}$  中开集  $U_P$ , 使得  $P \in U_P$ , 因而存在开区间  $I_P \subset U_P$ , 并且  $P \in I_P$ , 所以开区间族  $\{I_P | P \in I\}$  覆盖了  $I$ . 由数学分析中的有限覆盖定理, 在这族开区间中存在有限个开区间, 设为  $I_{P_1}, I_{P_2}, \dots, I_{P_m}$  仍然覆盖了  $I$ , 则由  $F \subset I$ , 及  $I_{P_i} \subset U_{P_i} (i = 1, 2, \dots, m)$ , 得  $F \subset \bigcup_{i=1}^m U_{P_i}$ . 如果开集  $F^c$  不在这  $m$  个开集中, 则  $U_{P_1}, U_{P_2}, \dots, U_{P_m}$  覆盖了  $F$ , 定理得证; 否则从这  $m$  个开集中去掉  $F^c$ , 因为  $F^c$  与  $F$  不相交, 所以剩下的  $m-1$  个开集仍然覆盖了  $F$ .  $\square$

**定义 15 (紧集).** 设  $M$  是度量空间  $X$  中一集合,  $\mathcal{M}$  是  $X$  中任一族覆盖了  $M$  的开集, 如果必可从  $\mathcal{M}$  中选出有限个开集仍然覆盖  $M$ , 则称  $M$  为  $X$  中的**紧集**.

由 Heine-Borel 定理知  $\mathbb{R}^n$  中的有界闭集必为紧集, 是否  $\mathbb{R}^n$  中的紧集都是有界闭集呢? 答案是肯定的, 我们有以下定理.

**定理 11.** 设  $M$  是  $\mathbb{R}^n$  中的紧集, 则  $M$  是  $\mathbb{R}^n$  中的有界闭集.

证明. 设点  $Q \in M^c$ , 对于  $M$  中的任意一点  $P$ , 由于  $P \neq Q$ , 由邻域性质, 存在  $\delta_P > 0$ , 使得

$$U(P, \delta_P) \cap U(Q, \delta_P) = \emptyset.$$

显然开集族  $\{U(P, \delta_P) | P \in M\}$  覆盖了  $M$ , 由于  $M$  是紧集, 因此存在有限个邻域  $U(P_i, \delta_{P_i}) (i = 1, 2, \dots, m)$ , 使得

$$M \subset \bigcup_{i=1}^m U(P_i, \delta_{P_i}) \quad (1)$$

由此立即可知  $M$  是有界集. 又令

$$\delta = \min\{\delta_{P_1}, \delta_{P_2}, \dots, \delta_{P_m}\},$$

则  $\delta > 0$ , 并且  $U(Q, \delta) \cap U(P_i, \delta_i) = \emptyset (i = 1, 2, \dots, m)$ , 由1式得  $U(Q, \delta) \cap M = \emptyset$ , 因此  $Q$  不是  $M$  的聚点, 所以  $M' \cap M^c = \emptyset$ , 这说明  $M' \subset M$ , 即  $M$  是闭集.  $\square$

**注.** 上述定理说明了  $\mathbb{R}^n$  中紧集和有界闭集是一致的. 但是在一般的度量空间中, 紧集一定是有界闭集 (与上述定理证明相类似), 但有界闭集不一定是紧集.

**定义 16 (自密集).** 设  $E \subset \mathbb{R}^n$ , 如果  $E \subset E'$ , 就称  $E$  是**自密集**.

**注.** 换句话说, 当集合中每点都是这个集的聚点时, 这个集是自密集. 另一个说法是没有孤立点的集是自密集.

例如, 空集是自密集,  $\mathbb{R}$  中有理数全体组成的集是自密集.

**定义 17 (完备集).** 设  $E \subset \mathbb{R}^n$ , 如果  $E = E'$ , 就称  $E$  是**完备集或完全集**.

可以看出, 完备集就是自密闭集, 即没有孤立点的闭集. 例如, 空集是完备集,  $\mathbb{R}$  中任一闭区间  $[a, b]$  及全直线都是完备集.

下面我们简单介绍直线上 (即  $\mathbb{R}$  中) 开集与闭集的构造.

在直线上, 开区间是开集, 但是开集不一定是开区间, 它往往是一系列开区间的并集. 为研究直线上开集的结构, 我们先引入构成区间的概念.

**定义 18** (构成区间). 设  $G$  是直线上的开集, 如果开区间  $(\alpha, \beta) \subset G$ , 而且端点  $\alpha, \beta \notin G$ , 那么称  $(\alpha, \beta)$  为  $G$  的构成区间.

**定理 12** (开集构造定理). 直线上任一个非空开集可以表示成至多可数个互不相交的构成区间的并.

证明. □

既然闭集的余集是开集, 那么从开集的构造可以引入余区间的概念.

**定义 19** (余区间). 设  $A$  是直线上的闭集, 称  $A$  的余集  $A^c$  的构成区间为  $A$  的余区间或邻接区间.

我们得到闭集的构造如下:

**定理 13.** 直线上的闭集  $F$  或者是全直线, 或者是从直线上挖掉至多可数个互不相交的开区间所得到的集.

由孤立点的定义很容易知道, 直线上点集  $A$  的孤立点必是包含在  $A$  的余集中的某两个开区间的公共端点. 因此, 闭集的孤立点一定是它的两个余区间的公共端点. 完备集是没有孤立点的闭集, 所以, 完备集就是没有相邻接的余区间的闭集.

## 4 Cantor 三分集

下面我们将讨论 Cantor 三分疏朗集, 这是实分析中的一个重要概念, 也常作为反例出现. 为此我们先给出疏朗集和稠密集的定义.

**定义 20** (稠密和疏朗). 设  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,

1. 设  $F \subset \mathbb{R}^n$ , 若对任意  $x \in F$  和任意邻域  $U(x)$ ,  $U(x) \cap E \neq \emptyset$ , 则称  $E$  在  $F$  中稠密.
2. 若对任意  $x \in \mathbb{R}^n$  和任意邻域  $U(x)$ , 存在  $U(y) \subset U(x) \cap E^c$ , 则称  $E$  是疏朗集或无处稠密集.

例如有限点集或收敛可数列都是疏朗集, 有理点集  $\mathbb{Q}^n$  在  $\mathbb{R}^n$  中稠密.

**定义 21** (Cantor 三分集). 将  $E_0 = [0, 1]$  三等分, 去掉中间的开区间, 剩下两个闭区间, 记这两个闭区间的并为  $E_1$ , 再把剩下的两个闭区间分别三等分, 分别去掉中间的开区间, 剩下  $2^2$  个闭区间, 记这些闭区间的并为  $E_2$ . 以此类推, 当进行到第  $n$  次时, 一共去掉  $2^{n-1}$  个开区间, 剩下  $2^n$  个长度为  $3^{-n}$  的相互隔离的闭区间, 记这些闭区间的并为  $E_n$ . 如此继续下去, 就从  $[0, 1]$  中去掉了可数多个互不相交且没有公共端点的开区间. 由定理13, 剩下的必是一个闭集, 称它为 Cantor 三分集, 记为  $P$ .

下面列举了 Cantor 集  $P$  的一些性质.

**性质 3.** 1.  $P$  是完备集.

2.  $P$  没有内点.

3.  $P$  是零测集.

4.  $P$  的基数为  $\aleph_0$ .

综上所述, 我们将 Cantor 三分集的特点归纳为: 它是一个测度为零且基数为  $\aleph_0$  的疏朗完备集.

## 第二部分 Lebesgue 测度论

虽然我们在小学时期就学习了长度、面积等相关概念，但事实上我们从未严格定义过长度、面积和体积。下面我们尝试定义这些概念。

我们可以把“长度”看作是 1 维实空间  $\mathbb{R}$ （即实数轴）的一个子集类  $X$ （ $\mathbb{R}$  的每个子集不一定都有“长度”）到实数域的一个映射  $m$ 。我们首先规定

$$m([a, b]) := b - a.$$

其中  $a \leq b$ 。这表明任何闭区间  $[a, b]$  的长度为  $b - a$ ，并蕴含了实数轴上任意一点的长度为零。然后我们可以列出几条公理（姑且称它们为公理）：设有实数轴上的一些点集构成的集类  $\mathcal{M}$ ，对于每个  $E \in \mathcal{M}$ ，都对应一个实数  $m$ ，有以下性质：

1. 非负性： $m(E) \geq 0$ ；
2. 有限可加性：若  $E_1, E_2, \dots, E_n$  两两不相交，则  $m\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n m(E_i)$ ；
3. 正则性： $m([a, b]) = b - a$ .

若集合  $A$  可通过平面上的正交变换（平面的正交变换即为平移、旋转、反射以及它们的乘积）变成了  $B$ ，则称  $A$  和  $B$  全等或合同。我们规定， $m(A) = m(B)$  当且仅当  $A \cong B$ 。

由于任意一点的长度都是零，由可加性公理可知开区间  $(a, b)$  的长度也是  $b - a$ ，半开半闭区间的长度亦然。为了让整个实数轴也有长度，我们规定  $m$  可以取到  $+\infty$ 。

类似地，我们可以把面积看作是 2 维实空间  $\mathbb{R}^2$ （即实平面）的一个子集类  $X$  到实数域  $\mathbb{R}$  的一个映射  $m$ 。我们首先规定一个邻边长分别为  $a$  和  $b$  的矩形  $A$  的面积为  $a \cdot b$ ， $a, b \geq 0$ 。这蕴含了线段的面积为零。以上的三条定理可以“原封不动”地来刻画面积。依次下去，还可以进一步把长度、面积的概念推广到体积以及  $n$  维 Euclid 空间  $\mathbb{R}^n$  中。事实上物理中的功 (work)，位移 (displacement)，冲量 (impulse) 都满足以上三条公理。此外，我们从长度公理中仅能求出有限个区间的并的长度，对于无限个点集的并，长度公理就无能为力了。因此，我们可以考虑用一个统一的概念来描述长度、面积等等，并设法扩充其测量的范围，这就引出了测度 (measure) 的概念。

显然，一下子推广到不可数无穷多个区间的长度是不现实的，我们退而求其次，考虑可数个区间的“长度”，就有 Lebesgue 提出的测度公理：

实数轴上的一些点集构成的集类  $\mathcal{M}$ ，对于每个  $E \in \mathcal{M}$ ，都对应一个实数  $m$ ，满足：

1. 非负性： $m(E) \geq 0$ ；
2. 可数可加性：若  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$  两两不相交，则  $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$ ；
3. 正则性： $m([a, b]) = b - a$ .

我们提出以下问题：满足 Lebesgue 测度公理且在集类  $\mathcal{M}$  上定义的实函数  $m(E)$  是否存在？ $\mathcal{M}$  由哪些集合构成？是否每个集合都有测度？这就是本章要讨论的内容。

## 5 Lebesgue 外测度

**定义 22** (Lebesgue 外测度). 设  $E \subset \mathbb{R}^n$ , 定义  $E$  的 Lebesgue 外测度为

$$m^*E = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_n|, \sum_{i=1}^{\infty} I_n \supset E\right\}$$

其中  $I_n$  是开域。

外测度具有以下三条基本性质：

**定理 14.** 1. 非负性： $m^*E \leq 0$ , 规定  $m^*\emptyset = 0$ ;

2. 单调性：设  $A \subset B$ , 则  $m^*A \leq m^*B$ ;

3. 次可数可加性： $m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i)$ .

证明. (1) 显然成立。

(2) 的证明. 设  $A \subset B$ , 则任一列覆盖  $B$  的开域  $\{I_n\}$  一定也是覆盖  $A$  的, 因而

$$m^*A \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_n|,$$

对所有能覆盖  $B$  的开域列取下确界即得

$$m^*A \leq \inf \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = m^*B.$$

(3) 的证明. 任给  $\varepsilon > 0$ , 由 Lebesgue 外测度定义, 对每个  $n$  都应有一列开区间  $I_{n,1}, I_{n,2}, \dots, I_{n,m}, \dots$ , 使  $E_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{n,m}$  且

$$\sum_{m=1}^{\infty} |I_{n,m}| \leq m^*E_n + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

从而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n,m=1}^{\infty} I_{n,m},$$

且

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |I_{n,m}| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |I_{n,m}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( m^*E_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*E_n + \varepsilon.$$

可见

$$m^* \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} |I_{n,m}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^* E_n + \varepsilon.$$

由于  $\varepsilon$  的任意性, 得

$$m^* \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i).$$

□

**定理 15.** 设区间  $I$ , 则  $m^*I = |I|$ .

证明. 1. 设  $I$  是闭区间. 对于任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在开区间  $I'$ , 使得  $I \subset I'$  且

$$|I'| < |I| + \varepsilon.$$

由外测度定义,  $m^*I < |I| + \varepsilon$ , 由  $\varepsilon$  的任意性, 有

$$m^*I \leq |I|.$$

现在来证明  $m^*I \geq |I|$ . 对于任给  $\varepsilon > 0$ , 存在一列开区间  $\{I_i\}$ , 使  $I \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ , 且

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < m^*I + \varepsilon.$$

由 Heine-Borel 有限覆盖定理, 在  $\{I_i\}$  中存在有限多个区间, 不妨设为  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , 使得  $I \subset \bigcup_{i=1}^n I_i$ .

因为  $I = \bigcup_{i=1}^n (I \cap I_i)$ , 于此  $I \cap I_i$  为区间, 由初等几何易知

$$|I| \leq \sum_{i=1}^n |I \cap I_i|,$$

故

$$|I| \leq \sum_{i=1}^n |I \cap I_i| \leq \sum_{i=1}^n |I_i| < m^*I + \varepsilon.$$

由于  $\varepsilon$  的任意性, 即得

$$|I| \leq m^*I.$$

于是  $m^*I = |I|$ .

2. 设  $I$  为任意区间. 作闭区间  $I_1, I_2$  使  $I_1 \subset I \subset I_2$  且

$$|I_2| - \varepsilon < |I| < |I_1| + \varepsilon$$

( $I_2$  可取为  $I$  的闭包  $\bar{I}$ ), 则

$$|I| - \varepsilon \leq |I_1| = m^* I_1 \leq m^* I \leq m^* I_2 = |I_2| < |I| + \varepsilon.$$

由于  $\varepsilon > 0$  的任意性, 得

$$m^* I = |I|.$$

□

## 6 Lebesgue 可测集

在5节中, 我们定义了 Lebesgue 外测度, 它的一个优点是任何集合都有外测度, 但是外测度只具有次可数可加性, 不具有可数可加性. 这意味着, 如果把外测度当作测度看, 使得任何集合都有测度, 这是办不到的. 这启发我们思考能否对外测度  $m^*$  的定义域进行限制, 即设法在  $\mathbb{R}^n$  中找出一个集类  $\mathcal{M}$ , 使得  $\mathcal{M}$  中的集合满足 Lebesgue 测度公理.

首先,  $\mathcal{M}$  对某些集合运算应该是封闭的. 例如对  $\mathcal{M}$  中的集合作可数并 (当然对有限并也成立, 只需在后面添加可数个空集即可)、作交或作差运算后仍在  $\mathcal{M}$  中, 而且对  $\mathcal{M}$  中一列互不相交的集合  $\{E_i\}$ , 应当满足可数可加性:

$$m^* \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^* E_i.$$

其次, 由 Lebesgue 的测度公理 (3), 自然应该要求  $\mathcal{M}$  包含  $\mathbb{R}^n$  中的所有有限开域. 又由于  $\mathbb{R}^n$  是一列有限开区间的可列并, 所以  $\mathcal{M}$  也应该包括  $\mathbb{R}^n$ .

想要从  $\mathbb{R}^n$  中挑出集类  $\mathcal{M}$ , 我们只需附加一个判断  $\mathbb{R}$  中的集合  $E$  属于  $\mathcal{M}$  的条件即可. 我们试从可数可加性条件来思考.

设  $E \subset \mathbb{R}^n$ . 如果  $E \in \mathcal{M}$ , 由于  $\mathbb{R}^n$  中任何开区间  $I$  都属于  $\mathcal{M}$ , 由  $\mathcal{M}$  的运算封闭性, 则  $I \cap E, I \cap E^c$  都应该属于  $\mathcal{M}$ . 但由  $(I \cap E) \cap (I \cap E^c) = \emptyset$ ,  $I = (I \cap E) \cup (I \cap E^c)$ , 所以由可数可加性, 应该有

$$m^* I = m^*(I \cap E) + m^*(I \cap E^c). \quad (2)$$

反之, 如果存在某个开区间  $I$ , 使2式不成立, 则  $E$  自然不应该属于  $\mathcal{M}$ . 由上可见, 对于  $\mathbb{R}^n$  中点集  $E$  是否属于  $\mathcal{M}$ , 我们可以用2是否对  $\mathbb{R}^n$  中任何开区间成立来判断. 事实上, 我们有下列结论.

**引理 1.** 设  $E \subset \mathbb{R}^n$ , 则2式对  $\mathbb{R}^n$  中任何开区间  $I$  都成立的充要条件是对  $\mathbb{R}^n$  中的任何点集  $T$  都有

$$m^* T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c). \quad (3)$$

证明. 充分性显然成立. 下证必要性. 设  $T$  为  $\mathbb{R}^n$  中的任意集合, 则由外测度定义, 对于任何  $\varepsilon > 0$ , 有一列开区间  $\{I_n\}$  使得

$$T \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \quad \text{且 } \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \leq m^* T + \varepsilon.$$

但由于

$$T \cap E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_i \cap E), \quad T \cap E^c \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_i \cap E^c),$$

故

$$\begin{aligned} m^*(T \cap E) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(I_i \cap E), \\ m^*(T \cap E^c) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(I_i \cap E^c). \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(I_i \cap E) + \sum_{i=1}^{\infty} m^*(I_i \cap E^c) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} [m^*(I_i \cap E) + m^*(I_i \cap E^c)] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \leq m^* T + \varepsilon. \end{aligned}$$

由于  $\varepsilon$  的任意性, 即得

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \leq m^* T.$$

另一方面, 由 Lebesgue 外测度的次可加性, 有

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \geq m^* T.$$

故

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) = m^* T.$$

□

注. 这个引理是由 Carathéodory 给出的, 通常我们称 3 式为 Carathéodory 条件.

现在, 我们终于可以给出 Lebesgue 可测的定义.

**定义 23** (Lebesgue 可测). 设  $E$  是  $\mathbb{R}^n$  中的点集, 如果对任一点集  $T$  都有

$$m^* T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c),$$

则称  $E$  是 Lebesgue 可测的, 也称为  $L$  可测. 这时  $E$  的 Lebesgue 外测度  $m^* E$  即称为  $E$  的 Lebesgue 测度, 记为  $mE$ . Lebesgue 可测集全体记为  $\mathcal{M}$ .

由上述定义，我们可以得出 Lebesgue 测度的若干性质.

**定理 16.** 集合  $E$  可测的充要条件是对于任意  $A \subset E, B \subset E^c$ , 总有

$$m^*(A \cup B) = m^*A + m^*B.$$

证明. 必要性 取  $T = A \cup B$ , 则  $T \cap E = A, T \cap E^c = B$ , 所以

$$m^*(A \cup B) = m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) = m^*A + m^*B.$$

充分性 对于任意  $T$ , 令  $A = T \cap E, B = T \cap E^c$ , 则  $A \subset E, B \subset E^c$  且  $A \cup B = T$ , 因此

$$m^*T = m^*(A \cup B) = m^*A + m^*B = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c).$$

□

**定理 17** (补集的可测性).  $S$  可测的充要条件是  $S^c$  可测.

证明. 事实上, 对于任意的  $T$ ,

$$m^*T = m^*(T \cap S) + m^*(T \cap S^c) = m^*(T \cap (S^c)^c) + m^*(T \cap S^c).$$

□

**定理 18** (并集的可测性). 设  $S_1, S_2$  都可测, 则  $S_1 \cup S_2$  也可测, 并且当  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  时, 对于任意集合  $T$  总有

$$m^*[T \cap (S_1 \cup S_2)] = m^*(T \cap S_1) + m^*(T \cap S_2).$$

证明. 首先证明  $S_1 \cup S_2$  的可测性, 即证对于任意  $T$  总有

$$m^*T = m^*(T \cap (S_1 \cup S_2)) + m^*(T \cap (S_1 \cup S_2)^c).$$

事实上, 有

$$\begin{aligned} m^*T &= m^*(T \cap S_1) + m^*(T \cap S_1^c) && (S_1 \text{ 可测}) \\ &= m^*(T \cap S_1) + m^*[(T \cap S_1^c) \cap S_2] + m^*[(T \cap S_1^c) \cap S_2^c] && (S_2 \text{ 可测}) \end{aligned}$$

由 De Morgan 公式,

$$m^*[(T \cap S_1^c) \cap S_2^c] = m^*[T \cap (S_1 \cup S_2)^c]$$

又因  $S_1$  可测, 且  $T \cap S_1 \subset S_1, (T \cap S_1^c) \cap S_2 \subset S_1^c$ , 故由定理 16, 有

$$m^*(T \cap S_1) + m^*[(T \cap S_1^c) \cap S_2] = m^*[T \cap (S_1 \cup (S_1^c \cap S_2))] = m^*[T \cap (S_1 \cup S_2)],$$

整理, 即得

$$m^*T = m^*(T \cap (S_1 \cup S_2)) + m^*(T \cap (S_1 \cup S_2)^c).$$

其次当  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  时, 因  $S_1$  可测, 且  $T \cap S_1 \subset S_1$ ,  $T \cap S_2 \subset S_1^c$ , 故由定理16, 有

$$m^*[T \cap (S_1 \cup S_2)] = m^*(T \cap S_1) + m^*(T \cap S_2).$$

□

**推论 1** (有限并的可测性). 设  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 都可测, 则  $\bigcup_{i=1}^n S_i$  也可测, 并且当  $S_i \cap S_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ) 时, 对于任何集合  $T$  总有

$$m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right)\right) = \sum_{i=1}^n m^*(T \cap S_i).$$

**定理 19** (交集的可测性). 设  $S_1, S_2$  都可测, 则  $S_1 \cap S_2$  也可测.

证明. 因为  $S_1 \cap S_2 = [(S_1 \cap S_2)^c]^c = [S_1^c \cup S_2^c]^c$ , 这就转化为了补集和并集的可测性结论. □

**推论 2** (有限交的可测性). 设  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 都可测, 则  $\bigcap_{i=1}^n S_i$  也可测.

**定理 20** (差集的可测性). 设  $S_1, S_2$  都可测, 则  $S_1 \setminus S_2$  也可测.

证明. 因为  $S_1 \setminus S_2 = S_1 \cap S_2^c$ , 这就转化为了交集和补集的可测性结论. □

**定理 21** (可数可加性). 设  $\{S_i\}$  是一列互不相交的可测集, 则  $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$  也可测, 且

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} mS_i.$$

证明. 首先证明  $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$  的可测性. 由有限并的可测性推论, 对任意  $n$ ,  $\bigcup_{i=1}^n S_i$  可测, 故对于任意  $T$  总有

$$\begin{aligned} m^*T &= m^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right)\right] + m^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right)^c\right] \\ &\geq m^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right)\right] + m^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)^c\right] && \text{(外测度的单调性)} \\ &= \sum_{i=1}^n m^*(T \cap S_i) + m^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)^c\right]. && \text{(有限并的可测性)} \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow \infty$  得

$$m^*T \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap S_i) + m^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)^c\right]. \quad (4)$$

由外测度的次可数可加性，故有

$$m^*T \geq m^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)\right] + m^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)^c\right].$$

另一方面由于

$$T = \left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)\right] \cup \left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)^c\right],$$

又有

$$m^*T \leq m^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)\right] + m^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)^c\right].$$

因此

$$m^*T = m^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)\right] + m^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)^c\right].$$

这就证明了  $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$  的可测性. 在4式中，令  $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ ，这时由于  $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) \cap S_i = S_i$ ，便得

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} mS_i.$$

另一方面，由外测度的次可数可加性，

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} mS_i.$$

故

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} mS_i.$$

□

**推论 3 (可数并的可测性).** 设  $\{S_i\}$  是一列可测集合，则  $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$  也可测.

证明. 因  $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$  可表示为互不相交的集合的并：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = S_1 \cup (S_2 \setminus S_1) \cup [S_3 \setminus (S_1 \cup S_2)] \cup \dots,$$

由有限并、差、可数可加性结论即得.

□

**推论 4 (可数交的可测性).** 设  $\{S_i\}$  是一列可测集合，则  $\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i$  也可测.

证明. 因  $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i^c$ ，应用补与可数并的结论即得.

□

由上述性质的讨论，我们可知，Lebesgue 可测集对可数并、可数交以及差集余集的运算都是封闭的。此外，定理21表明了 Lebesgue 测度具有可数可加性，它是满足 Lebesgue 测度公理的。下面，我们再介绍几个性质。

**定理 22.** 设  $\{S_i\}$  是一列递增的可测集合

$$S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_n \subset \cdots,$$

令  $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , 则

$$mS = \lim_{n \rightarrow \infty} mS_n.$$

证明. 因有

$$S = S_1 \cup (S_2 \setminus S_1) \cup (S_3 \setminus S_2) \cup \cdots \cup (S_n \setminus S_{n-1}) \cup \cdots,$$

其中各被并项都可测且互不相交，由 Lebesgue 测度的可数可加性，有（令  $S_0 = \emptyset$ ）

$$\begin{aligned} mS &= \sum_{i=1}^{\infty} m(S_i \setminus S_{i-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m(S_i \setminus S_{i-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} m \left[ \bigcup_{i=1}^n (S_i \setminus S_{i-1}) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} mS_n. \end{aligned}$$

□

**定理 23.** 设  $\{S_i\}$  是一列递降的可测集合

$$S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots,$$

令  $S = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , 则当  $mS_1 < \infty$  时，

$$mS = \lim_{n \rightarrow \infty} mS_n.$$

证明. 由于  $S_n$  可测，则可数交  $S$  也可测。又因  $S_n$  递降，从而  $\{S_1 \setminus S_n\}$  递增，故由定理22有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m[S_1 \setminus S_n] = m \left[ \bigcup_{i=1}^{\infty} (S_1 \setminus S_n) \right] = m(S_1 \setminus S).$$

因  $mS_1 < \infty$  及

$$(S_1 \setminus S_n) \cup S_n = S_1,$$

$$m(S_1 \setminus S_n) + mS_n = mS_1,$$

有

$$m(S_1 \setminus S) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(S_1 \setminus S_n) = mS_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} mS_n.$$

由于

$$m(S_1 \setminus S) = mS_1 - mS,$$

故

$$mS = \lim_{n \rightarrow \infty} mS_n.$$

□

注. 条件  $mS_1 < \infty$  是必要的.

**定理 24** (平移不变性). 对任意实数  $\alpha$ , 定义映射  $\tau_\alpha : x \rightarrow x + \alpha$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . 则对任何集  $E \subset \mathbb{R}^n$ , 有  $m^*E = m^*(\tau_\alpha E)$ , 且当  $E$  为 Lebesgue 可测时,  $\tau_\alpha E$  也 Lebesgue 可测 (且测度不变).

证明. 对任何一列开域  $\{I_i\}$ ,  $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ , 同时就有  $\tau_\alpha I_i$  亦为开域, 以及  $\tau_\alpha E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (\tau_\alpha I_i)$ , 所以

$$m^*E = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right\} \geq m^*(\tau_\alpha E).$$

但  $\tau_\alpha E$  再平移  $\tau_{-\alpha}$  后就是  $E$ , 所以  $m^*(\tau_\alpha E) \geq m^*E$ . 这样就得到  $m^*E = m^*(\tau_\alpha E)$ .

如果  $E$  为 Lebesgue 可测, 那么对于任何  $T \subset \mathbb{R}^n$ , 有

$$m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c).$$

由于  $\tau_\alpha(T \cap E) = \tau_\alpha T \cap \tau_\alpha E$ ,  $\tau_\alpha(T \cap E^c) = \tau_\alpha T \cap \tau_\alpha E^c$ , 因此从上式得到

$$m^*(\tau_\alpha T) = m^*(\tau_\alpha T \cap \tau_\alpha E) + m^*(\tau_\alpha T \cap \tau_\alpha E^c),$$

而上式中  $\tau_\alpha T$  为任意集, 因此  $\tau_\alpha E$  为 Lebesgue 可测.

□

定理说明, 集  $E \subset \mathbb{R}^n$  经过平移后, 它的外测度不变, 对于 Lebesgue 可测集, 平移后仍为 Lebesgue 可测. 这个性质称为 Lebesgue 测度的平移不变性.

用类似的方法还可以证明 Lebesgue 测度的反射不变性.

**定理 25** (反射不变性). 定义映射  $\tau : x \rightarrow -x$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . 则对任何集  $E \subset \mathbb{R}^n$ , 有  $m^*E = m^*(\tau E)$ , 且当  $E$  为 Lebesgue 可测时,  $\tau E$  也 Lebesgue 可测 (且测度不变).

证明不再赘述.

## 7 可测集类

这一节我们介绍常见的可测集.

**定理 26.** 1. 凡外测度为零的集皆可测, 称为零测度集或零测集;

2. 零测集的任何子集仍为零测集;
3. 至多可数个零测集的并仍为零测集.

用 Lebesgue 测度的定义与简单性质即可证明, 这里不再赘述.

**定理 27** (区间皆可测). 区间  $I$  都是可测集, 且  $mI = |I|$ .

证明. 设  $I_0$  是异于区间  $I$  的任一开区间, 则

$$|I_0| = m^*(I_0 \cap I) + m^*(I_0 \cap I^c).$$

事实上, 在  $\mathbb{R}$  中显然, 在  $\mathbb{R}^2$  中由于  $I_0 \cap I$  为区间, 而  $I_0 \cap I^c$  可以分解成至多四个不相交的区间  $I_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , 从而可证

$$m^*(I_0 \cap I^c) \leq \sum_{i=1}^4 |I_i|,$$

因此

$$m^*(I_0 \cap I) + m^*(I_0 \cap I^c) \leq |I_0|,$$

另一方面, 反向不等式总成立, 于是

$$m^*(I_0 \cap I) + m^*(I_0 \cap I^c) = |I_0|,$$

$\mathbb{R}^n$  情形仿此.

由 Carathéodory 引理及  $m^*I_0 = |I_0|$ , 对  $\mathbb{R}^n$  中任意点集  $T$  都有

$$m^*T = m^*(T \cap I) + m^*(T \cap I^c).$$

从而  $I$  可测. □

**定理 28.** 凡开集、闭集皆可测.

证明. 任何非空开集可表示为至多可数个区间的并, 而区间是可测的. 开集既可测, 闭集作为开集的余自然也可测. □

为了进一步拓广可测集类, 我们给出下面的定义.

**定义 24** ( $\sigma$  代数). 设  $\Omega$  是由  $\mathbb{R}^n$  的一些子集组成的集类, 如果  $\Omega$  满足条件

1. (包含空集)  $\emptyset \in \Omega$ ;
2. (在补集下封闭) 若  $E \in \Omega$ , 则  $E^c \in \Omega$ ;
3. (在可数并下封闭) 若  $E_n \in \Omega$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 则  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Omega$ .

则称  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^n$  的一个  $\sigma$  代数.

可以看出,  $\mathbb{R}^n$  中所有 Lebesgue 可测集全体组成的集类  $\mathcal{M}$  是一个  $\sigma$  代数 (称之为 Lebesgue 代数) .

**定义 25** (测度). 设  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^n$  上的一个  $\sigma$  代数. 如果定义在  $\Omega$  上的非负值集函数  $\mu$  满足条件

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
2. 若  $E_n \in \Omega$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 且任意  $n \neq m$ ,  $E_n \cap E_m = \emptyset$ , 有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

则称  $\mu$  是  $\Omega$  上的 (正) 测度.

易见, Lebesgue 测度  $m$  是定义在  $\sigma$  代数上的测度.

由  $\sigma$  代数的定义易知: 如果  $\{\Omega_\alpha\}$  是  $\mathbb{R}^n$  上的一族  $\sigma$  代数, 则它们的交集  $\bigcap_\alpha \Omega_\alpha$  也是  $\sigma$  代数.

**定义 26** (集类产生的  $\sigma$  代数). 设  $\Sigma$  是  $\mathbb{R}^n$  的一个子集类, 则称所有包含  $\Sigma$  的  $\sigma$  代数的交集为  $\Sigma$  产生的  $\sigma$  代数.

由于  $\mathbb{R}^n$  全体子集组成的子集类是包含  $\Sigma$  的  $\sigma$  代数, 因此包含  $\Sigma$  的  $\sigma$  代数不是空集, 并且是包含  $\Sigma$  的最小的  $\sigma$  代数.

**定义 27** (Borel 代数). 由  $\mathbb{R}^n$  中全体开集组成的子集类生成的  $\sigma$  代数, 记为  $\mathcal{B}$ , 称为 Borel 代数, Borel 代数里的元素称为 Borel 集.

因为开集都是 Lebesgue 可测集, 因此  $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ , 因而有以下定理.

**定理 29.** 凡 Borel 集都是 Lebesgue 可测集.

**定义 28** (测度空间). 若  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^n$  上的一个  $\sigma$  代数,  $\mu$  是  $\Omega$  上的测度, 则称  $(\mathbb{R}^n, \Omega, \mu)$  为测度空间.

例如, 上述  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$  和  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, m)$  都是测度空间.

**定义 29.** 设集合  $G$  可表示为一列开集  $\{G_i\}$  的交集:

$$G = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i,$$

则称  $G$  为  $G_\delta$  型集.

设集合  $F$  可表示为一列闭集  $\{F_i\}$  的并集:

$$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i,$$

则称  $F$  为  $F_\delta$  型集.

显然  $G_\delta$  型集及  $F_\delta$  型集都是 Borel 集.

我们已经知道,  $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ , 即 Borel 集都是 Lebesgue 可测集. 但反之不成立. 我们下面将讨论 Lebesgue 可测集合类中除了 Borel 集之外, 还存在什么样的集合.

**定理 30.** 设  $E$  是任一可测集, 则一定存在  $G_\delta$  型集  $G$ , 使  $G \supset E$ , 且  $m(G \setminus E) = 0$ .

证明. (1) 先证: 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在开集  $G$ , 使  $G \supset E$ , 且  $m(G \setminus E) < \varepsilon$ .

先设  $mE < \infty$ , 则由测度定义, 有一列开区间  $\{I_i\}(i = 1, 2, \dots)$ , 使  $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supset E$ , 且

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < mE + \varepsilon.$$

令  $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ , 则  $G$  为开集,  $G \supset E$ , 且

$$mE \leq mG \leq \sum_{i=1}^{\infty} mI_i = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < mE + \varepsilon.$$

因此,  $mG - mE < \varepsilon$  (这里用到  $mE < \infty$ ), 从而  $m(G \setminus E) < \varepsilon$ .

其次, 设  $mE = \infty$ , 这时  $E$  必为无界集, 但它总可表示成可数多个互不相交的有界可测集的并, 即  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n(mE_n < \infty)$ , 对每个  $E_n$  应用上面结果, 可找到开集  $G_n \supset E_n$  使  $m(G_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ .

令  $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ , 则  $G$  为开集,  $G \supset E$ , 且

$$G \setminus E = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E_n),$$

$$m(G \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(G_n \setminus E_n) < \varepsilon.$$

(2) 依次取  $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 由上述证明, 存在开集  $G_n \supset E$ , 使  $m(G_n \setminus E) < \frac{1}{n}$ .

令  $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ , 则  $G$  为  $G_\delta$  型集,  $G \supset E$ , 且

$$m(G \setminus E) \leq m(G_n \setminus E) < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

故  $m(G \setminus E) = 0$ . □

**定理 31.** 设  $E$  是任一可测集, 则一定存在  $F_\delta$  型集  $F$ , 使  $F \subset E$ , 且  $m(E \setminus F) = 0$ .

证明. 因  $E^c$  也可测, 由定理30可知, 存在  $G_\delta$  型集  $G \supset E^c$ , 使  $m(G \setminus E^c) = 0$ .

令  $F = G^c$ , 则  $F$  为  $F_\delta$  型集,  $F \subset E$ , 且

$$m(E \setminus F) = m(E \setminus G^c) = m(G \setminus E^c) = 0.$$

□

以上两个定理说明了只要有了全部  $G_\delta$  型集或  $F_\delta$  型集 (它们只是 Borel 集的一部分) 和全部 Lebesgue 零测集, 就可以得到一切 Lebesgue 可测集.

**定理 32** (正则性). 若  $E$  是一可测集, 则

1.  $mE = \inf\{mG|G \text{ 是开集}, E \subset G\}$  (外正则性);
2.  $mE = \sup\{mK|K \text{ 是紧集}, K \subset E\}$  (内正则性).

证明. (1) 的证明: 若  $mE = \infty$ , 则对任意  $G \supset E$ ,  $mG = \infty$ , 因此 (1) 成立.

若  $mE < \infty$ , 则由定理30的证明, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在开集  $G \supset E$ ,  $m(G \setminus E) < \varepsilon$ , 因此

$$mG = m(G \setminus E) + mE < mE + \varepsilon.$$

由确界定义, (1) 成立.

(2) 的证明: 若  $E$  有界, 则存在有界闭区间  $I$ , 使得  $E \subset I$ . 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在开集  $G \supset I \setminus E$ , 使得  $m(G \setminus (I \setminus E)) < \varepsilon$ . 令  $K = I \setminus G$ , 则  $K$  是紧集, 且

$$E \setminus K = E \cap G \subset G \setminus (I \setminus E),$$

故

$$m(E \setminus K) < \varepsilon.$$

于是当  $E$  有界时, (2) 成立.

若  $E$  无界, 对任意  $n$ , 令

$$E_n = \{x | d(x, 0) < n\} \cap E,$$

则  $\{E_n\}$  单调可测,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} mE_n = mE$ . 由上述证明, 存在紧集  $K_n \subset E_n$ ,

$$mE_n - \frac{1}{n} \leq mK_n \leq mE_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

由此得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} mK_n = mE.$$

因此无论  $mE = \infty$  或  $mE < \infty$ , (2) 成立. □